3 Potencias y raíces

Números grandes en la India...

Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabharata* (siglo VI a. C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades.

Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Templo Swayambhunath en el valle de Katmandú (Nepal).

... y en la antigua Grecia

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a. C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabrían en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.

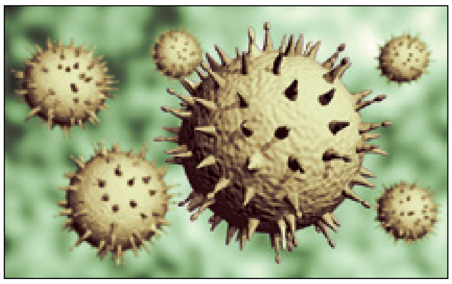
"Arquímedes pensativo" de Domenico Fetti.

Llega el Sistema de Numeración Decimal (S.N.D.)

Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indo-arábiga".

El S.N.D. dio alas al desarrollo de las matemáticas, más allá de su aplicación en situaciones prácticas cotidianas.

La estructura del S.N.D., junto con las potencias, permite expresar con gran comodidad y sencillez números de cualquier tamaño, por grandes o pequeños que sean.



El virus de la gripe tiene un diámetro medio aproximado de 10^{-7} metros.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Potencias

Recuerda

EXPONENTE

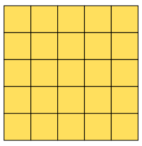
a^n

BASE

Ten en cuenta

EL CUADRADO

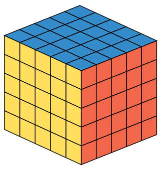
La potencia a^2 (a al cuadrado) coincide con el área de un cuadrado de lado a.



El cuadrado de 5:
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

EL CUBO

La potencia a^3 (a al cubo) coincide con el volumen de un cubo de lado a.



El cubo de 5:
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Potencias de exponente positivo

Recuerda que una potencia es una forma abreviada de expresar una multiplicación de factores iguales.

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo:

$$5^1 = 5 \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16 \qquad \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{-8}{125}$$

Las potencias de base 10

Calcular las potencias de base 10 es particularmente sencillo:

$$10^1 = 10 \qquad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \qquad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10\,000 \qquad 10^5 = 100\,000 \qquad 10^6 = 1\,000\,000$$

Es decir, la potencia 10^n es igual a la unidad seguida de n ceros.

$$10^n = 1\underbrace{00 \ldots \ldots 0}_{n \text{ ceros}}$$

Descomposición polinómica de números enteros

Los números se pueden descomponer asociando cada orden de unidades a una potencia de base 10.

Por ejemplo:

$5\,630\,497 = 5\,000\,000 + 600\,000 + 30\,000 + 0\,000 + 400 + 90 + 7 =$

$= 5 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 7 =$

$= 5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$

Esta forma de **descomposición** recibe el nombre de **polinómica.**

Piensa y practica

1. Calcula.

a) 5^3 b) 2^6 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ d) 8^1

e) $(-5)^3$ f) $(-2)^6$ g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ h) $(-8)^1$

2. Expresa como una potencia de base 10.

a) 100 000 c) 100 000 000

b) Mil millones d) Un billón

3. Escribe el cubo de todos los números enteros comprendidos entre –5 y +5.

4. Escribe la descomposición polinómica de:

a) 250 467 b) 8 400 900 c) 42 800 500 000

5. ¿Qué número corresponde a cada descomposición?

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Propiedades y operaciones

① La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores.

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = \\ = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} (4 \cdot 2)^3 = 8^3 = 512 \\ 4^3 \cdot 2^3 = 64 \cdot 8 = 512 \end{array}\right\} (4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3$$

② La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} (12 : 3)^2 = 4^2 = 16 \\ 12^2 : 3^2 = 144 : 9 = 16 \end{array}\right\} (12 : 3)^2 = 12^2 : 3^2$$

③ Para multiplicar dos potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 3^4 \cdot 3^2 = 81 \cdot 9 = 729 \\ 3^{4+2} = 3^6 = 729 \end{array}\right\} 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2}$$

Ten en cuenta

La propiedad ④, de momento, solo sirve si $m > n$:

a^{m-n} siendo $m - n > 0$

Más adelante aprenderás qué hacer cuando el exponente resulta nulo o negativo $(m \leq n)$.

④ Para dividir dos potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^6}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{o bien} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2^7 : 2^3 = 128 : 8 = 16 \\ 2^{7-3} = 2^4 = 16 \end{array}\right\} 2^7 : 2^3 = 2^{7-3}$$

24

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

⑤ Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

$$(a^2)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(2^4)^2 = 16^2 = 256\\ 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256\end{array}\right\} \ (2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2}$$

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia en cada caso:

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$

b) $(5^3)^4$

c) $5^8 : 5^6$

d) $\dfrac{14^5}{7^5}$

e) $2^7 \cdot 5^7$

f) $(4^5)^2 : (4^2)^4$

g) $\dfrac{7^4 \cdot 7^5}{(7 \cdot 7^3)^2}$

h) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)}{6^2 : (-2)^2}$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ③)

b) $(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$ (Propiedad ⑤)

c) $5^8 : 5^6 = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\dfrac{14^5}{7^5} = \left(\dfrac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ②)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ①)

f) $(4^5)^2 : (4^2)^4 = 4^{10} : 4^8 = 4^2$ (Propiedades ⑤ y ④)

g) $\dfrac{7^4 \cdot 7^5}{(7 \cdot 7^3)^2} = \dfrac{7^9}{(7^4)^2} = \dfrac{7^9}{7^8} = 7^1 = 7$ (Propiedades ③, ⑤ y ④)

h) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)}{6^2 : (-2)^2} = \dfrac{(-3)^4}{[6 : (-2)]^2} = \dfrac{(-3)^4}{(-3)^2} = (-3)^2$ (Propiedades ③, ② y ④)

Piensa y practica

6. Reduce cada expresión a una sola potencia:

a) $x \cdot x^4 \cdot x^2$ b) $x^9 : x^7$

c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6)$ d) $(a^9 : a^6) \cdot a^2$

e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4)$ f) $\dfrac{x^3 \cdot x^6}{x^7}$

g) $\dfrac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3}$ h) $\dfrac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3}$

7. Opera.

a) $(x^3)^4$ b) $(x^2)^5$ c) $(x^3)^5 : x^{10}$

d) $a^9 : (a^4)^2$ e) $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2$ f) $(a^2)^4 : (a^3)^2$

8. Reduce a una sola potencia y después calcula.

a) $7^5 : 7^3$ b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ c) $(-5)^7 : 5^6$

d) $[(-3)^2]^2$ e) $(7^2)^3 : (7^3)^2$ f) $(-2)^3 : (-2)$

9. Calcula por el camino más corto, aplicando las propiedades 1 y 2, como en el ejemplo:

- $\mathbf{18^4 : 9^4 = (18 : 9)^4 = 2^4 = 16}$

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $24^3 : 8^3$ c) $4^3 \cdot (-5)^3$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

10. Reduce a un único número racional en cada caso:

a) $2^3 \cdot 5^4$ b) $20^5 : 2^6$

c) $9^6 : (-3)^6$ d) $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$

e) $\dfrac{6^5}{2^4} : 3^5$ f) $(-2)^8 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^5$

g) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^6 : \left(\dfrac{1}{9}\right)^3$ h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

En la web Actividades con potencias de exponente natural.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad ④ del epígrafe anterior, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, solo era válida para $m > n$.

Veamos qué ocurre cuando no es así:

- Cuando los dos exponentes son iguales, $m = n$, aplicando la propiedad ④ obtenemos una potencia de exponente cero:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = \boxed{a^0} \quad \text{Pero también} \rightarrow \quad \frac{a^3}{a^3} = \boxed{1}$$

Así, diremos que $a^0 = 1$.

> La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

Por ejemplo:

$$5^0 = 1 \qquad (-3)^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Cuando el exponente del numerador es menor que el del denominador, $m < n$, aplicando la propiedad ④ obtenemos una potencia de exponente negativo:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = \boxed{a^{-2}} \quad \text{Pero también} \rightarrow \quad \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a} = \boxed{\frac{1}{a^2}}$$

Así, diremos que $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$, y en general, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

> Una potencia de exponente negativo es la inversa de la misma potencia con exponente positivo.

Por ejemplo:

$$5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5} \qquad 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

Ten en cuenta

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1 : a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

En la web

- Practica operaciones con potencias sencillas.
- Practica operaciones con potencias más complicadas.

Las potencias de base 10 de exponente cero o negativo

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, observa el significado que toman las potencias de base 10 con exponente cero o negativo:

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$

Es decir, la potencia 10^{-n} es igual a una unidad del enésimo orden decimal.

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots001}_{n \text{ cifras decimales}}$$

En la web

Recuerda las propiedades de las potencias de base 10.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Descomposición polinómica de números decimales

La descomposición polinómica también se puede aplicar a los números decimales, recurriendo a las potencias de base 10 con exponente negativo.

Observa este ejemplo:

$$2{,}38547 = 2 + 0{,}3 + 0{,}08 + 0{,}005 + 0{,}0004 + 0{,}00007 =$$
$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001 + 4 \cdot 0{,}0001 + 7 \cdot 0{,}00001 =$$
$$= 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5}$$

Es decir, cada cifra decimal va multiplicada por la correspondiente potencia de base 10 con exponente negativo.

En la web

Practica con potencias de base 10.

Ejercicios resueltos

1. *Expresar "una diezmillonésima" como potencia de base 10.*	$0{,}0000001 = \frac{1}{10\,000\,000} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7}$
2. *Expresar como fracción irreducible o como número entero estas expresiones:* *a)* 2^{-4} *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ *c)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$	a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 8$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
3. *Simplificar y calcular.* *a)* $(2^{-1})^2$ *b)* $3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-4}$ *c)* $\frac{1}{3^{-2}}$	a) $(2^{-1})^2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ b) $3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-4} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{3^{-2}} = 1 : 3^{-2} = \frac{1}{1} : \frac{1}{3^2} = 9$
4. *Simplificar y calcular.* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{4^3}{3^3} = \frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{(2^2)^3}{3^3} = \frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{2^6}{3^3} = 3 \cdot 2^2 = 12$

Piensa y practica

1. Expresa en cada caso con una fracción irreducible o con un número entero:

a) 7^0 b) 3^{-3} c) $(-3)^{-2}$ d) 8^{-1}

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0$ f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ h) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$

2. Calcula.

a) $6^2 \cdot 3^{-4}$ b) $2^{-3} : 2^2$ c) $5^{-2} \cdot 5^{-3}$

d) $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2$ e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2})$

f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

3. Reduce a una sola potencia cada expresión:

a) $x^4 \cdot x^{-5}$ b) $x^2 : x^{-1}$ c) $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6)$

d) $(a^2)^3 : a^7$ e) $a^8 \cdot (a^2)^{-3}$ f) $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2})$

g) $\frac{x^2}{x^{-3}}$ h) $\frac{x^{-2}}{x}$ i) $\frac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3}$

4. Reduce estas expresiones:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x$ b) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 : a^{-3}$ c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2}$

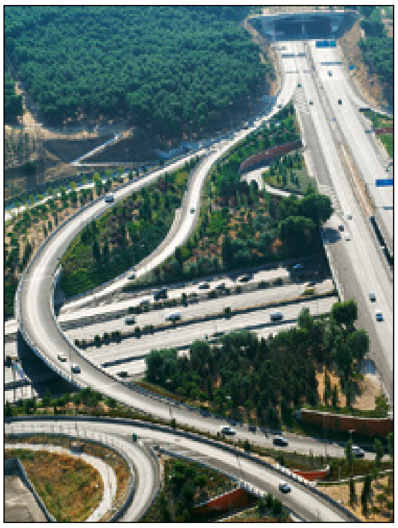
d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \frac{x^6}{y^7}$ f) $\frac{a^5}{b^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

En la web

- Repasa las operaciones con potencias de exponente entero.
- Refuerza las operaciones con potencias de exponente entero.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Notación científica



Números aproximados

Con mucha frecuencia, en la medición de magnitudes usamos números aproximados. Y lo hacemos, en general, por uno de estos motivos:

- No es práctico o no es necesario dar una cantidad exacta que sí conocemos.
- No importa la cantidad exacta o no tenemos forma de medirla con exactitud.

Ejemplos

a) Presupuesto inicial para la construcción de un tramo de autopista:

Cálculo según proyecto $\longrightarrow$ 134 829 465 €

Valor aproximado $\longrightarrow$ 135 000 000 €

b) Población mundial:

Medición (varía cada instante) $\longrightarrow$ 7 213 940 271 personas

Valor aproximado $\longrightarrow$ 7 200 000 000 personas

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $513\,000 = 5{,}13 \cdot 10^n$

b) $2\,577{,}6 = 2{,}5776 \cdot 10^n$

c) $453 \cdot 10^3 = 4{,}53 \cdot 10^n$

d) $125{,}3 \cdot 10^6 = 1{,}253 \cdot 10^n$

Notación científica para números muy grandes

Para unificar la información consiguiendo que las cantidades sean más manejables y se comparen con facilidad, las aproximaciones de números grandes se suelen expresar mediante el producto de un número decimal con una sola cifra en la parte entera por una potencia de base diez **(notación científica)**. Así:

a) $135\,000\,000 \rightarrow 1{,}35 \cdot 100\,000\,000 \rightarrow 1{,}35 \cdot 10^8$

b) $7\,200\,000\,000 \rightarrow 7{,}2 \cdot 1\,000\,000\,000 \rightarrow 7{,}2 \cdot 10^9$

Notación científica

NOTACIÓN CIENTÍFICA

PARTE ENTERA (UNA CIFRA)

$\underbrace{a, b\, c\, d \ldots}_{\text{CIFRAS SIGNIFICATIVAS}} \cdot 10^n$ ← EXPONENTE ENTERO

Ejercicio resuelto

Expresar en notación científica el número 4 782 930 663 200, redondeándolo a los millares de millón.

4 782 930 663 200 $\rightarrow$ Redondeo: 4 783 000 000 000

$4\,783\,000\,000\,000 = 4{,}783 \cdot 1\,000\,000\,000\,000$

Expresión en notación científica $\rightarrow 4{,}783 \cdot 10^{12}$

Piensa y practica

1. Expresa estas cantidades en notación científica:

a) 2 800 000 b) 169 000 000

c) 7 020 000 000 d) 53 420 000 000 000

2. Expresa con todas sus cifras.

a) $3{,}6 \cdot 10^5$ b) $8{,}253 \cdot 10^8$ c) $2{,}27 \cdot 10^{11}$

3. Compara estas expresiones del mismo número:

$2\,370\,000\,000\,000\,000\,000 \leftrightarrow 2{,}37 \cdot 10^{18}$

¿Cuál te parece más manejable? Explica por qué.

4. Expresa 6 274 344 825 en notación científica, redondeándolo a las decenas de millón.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Notación científica para números muy pequeños

También hay cálculos y mediciones que arrojan cantidades muy pequeñas (en el mundo científico, en medicina, en biología microscópica, etc.).

Ejemplos

a) Diámetro de cierta bacteria $\rightarrow$ 0,00062 mm

b) Cantidad de metales pesados en una muestra de agua $\rightarrow$ 0,000000834 g

Para expresar las cantidades anteriores en notación científica, recurrimos a las potencias negativas de base 10, como se muestra a continuación:

a) $0{,}00062 \rightarrow 6{,}2 \cdot 0{,}0001 \rightarrow 6{,}2 \cdot 10^{-4}$

b) $0{,}000000834 \rightarrow 8{,}34 \cdot 0{,}0000001 \rightarrow 8{,}34 \cdot 10^{-7}$

Notación científica

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $0{,}000007 = 7 \cdot 10^n$

b) $0{,}00513 = 5{,}13 \cdot 10^n$

c) $0{,}45 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^n$

d) $0{,}0018 \cdot 10^{-5} = 1{,}8 \cdot 10^n$

Operaciones con números en notación científica

- Para **sumar** o **restar** números en notación científica, es necesario preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10 y, así, poder sacar factor común.

Ejemplo

$$4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 47{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}5 \cdot 10^6 = (47{,}3 - 7{,}5) \cdot 10^6 =$$
$$= 39{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}98 \cdot 10^7$$

- Para **multiplicar** o **dividir** números en notación científica, actuaremos de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la parte decimal y la potencia de base 10.

Ejemplos

a) $(4{,}73 \cdot 10^7) \cdot (7{,}5 \cdot 10^5) = (4{,}73 \cdot 7{,}5) \cdot 10^{7+5} = 35{,}475 \cdot 10^{12} = 3{,}5475 \cdot 10^{13}$

b) $\dfrac{4{,}73 \cdot 10^7}{7{,}5 \cdot 10^{-5}} = (4{,}73 : 7{,}5) \cdot 10^{7-(-5)} = 0{,}631 \cdot 10^{12} = 6{,}31 \cdot 10^{11}$

En la web

- Practica la escritura en notación científica.
- Practica la suma con números en notación científica.

Piensa y practica

5. Expresa estas cantidades en notación científica:

a) 0,00016 b) 0,00000387

c) 0,00000000083

d) 0,000000000000000629

6. Expresa con todas sus cifras.

a) $2{,}65 \cdot 10^{-4}$ b) $8{,}253 \cdot 10^{-6}$ c) $2{,}27 \cdot 10^{-11}$

7. Observa dos notaciones del mismo número:

$6{,}3 \cdot 10^{-18} \leftrightarrow 0{,}0000000000000000063$

¿Cuál te parece más práctica? Explica por qué.

8. Calcula.

a) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6$

b) $1{,}8 \cdot 10^9 + 2{,}25 \cdot 10^8$

c) $(5{,}84 \cdot 10^{12}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^8)$

d) $(4{,}38 \cdot 10^{21}) : (5{,}84 \cdot 10^{12})$

9. En 18 gramos de agua (H_2O) hay $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas elementales (número de Avogadro).

a) ¿Cuántas moléculas elementales hay en un gramo de agua?

b) ¿Cuál es la masa de una molécula elemental?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para notación científica

Cualquiera de los modelos de calculadora puede ser programado para que trabaje solo en notación científica (modo SCI). Es preferible que no uses ese modo, sino el normal (**NORM**). Averigua cómo se programa en tu calculadora. Puedes hallarlo, según los modelos, pulsando reiteradamente a la tecla MODE, o bien mediante **SHIFT SETUP.** Si se te pregunta **1~2?,** responde **2.** De este modo solo recurrirá a la notación científica cuando el número de cifras decimales utilizado sea muy grande.

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, EXP o ×10ˣ.

■ **INTERPRETACIÓN**

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

- 123 000 000 · 45 000 = 5 535 000 000 000

  123 000 000 ⊗ 45 000 ⊜ $\boxed{5.535 \times 10^{12}}$

- 0,123000 : 50 000 = 0,00000000246

  0,000123 ⊕ 50 000 ⊜ $\boxed{2.46 \times 10^{-09}}$

■ **ESCRITURA**

Para poner $5{,}74 \cdot 10^{9}$, hacemos: 5,74 ×10ˣ 9 [o bien 5,74 EXP 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 ×10ˣ (−) 13 [o bien 2,95 EXP 13 +/−]

■ **OPERACIONES**

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla ⊜, da el resultado en forma científica.

Ejercicio resuelto

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{8} + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^{8}$

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15}) = (3{,}214 \cdot 7{,}2) \cdot 10^{-5+15} = 23{,}1408 \cdot 10^{10} =$
$= 2{,}31408 \cdot 10^{11}$

Con calculadora: 3,214 ×10ˣ (−) 5 ⊗ 7,2 ×10ˣ 15 ⊜ $\boxed{2.31408 \times 10^{11}}$

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}} = \dfrac{3{,}214}{7{,}2} \cdot 10^{-5-15} = 0{,}446 \cdot 10^{-20} = 4{,}46 \cdot 10^{-21}$

Con calculadora: 3,214 ×10ˣ (−) 5 ⊕ 7,2 ×10ˣ 15 ⊜ $\boxed{4.4638889 \times 10^{-21}}$

c) 3,2 ×10ˣ 8 ⊕ 7,3 ×10ˣ (−) 14 ⊖ 4,552 ×10ˣ 8 ⊜ $\boxed{-1.352 \times 10^{8}}$

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 ×10ˣ 4 ⊕ 5,35 ×10ˣ 17 ⊜ $\boxed{5.35 \times 10^{17}}$

Piensa y practica

10. Resuelve con la calculadora las actividades 5, 8 y 9 de la página anterior.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Raíces exactas

Dos raíces cuadradas

Observa:

$3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

En la web

Refuerza el cálculo con raíces exactas.

■ **RAÍCES CUADRADAS**

Como sabes, $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$.

Análogamente, $\sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$, porque $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{25}{4}$.

■ **RAÍCES CÚBICAS**

Las raíces cúbicas se comportan de forma similar a las raíces cuadradas:

$\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{\dfrac{8}{1000}} = \dfrac{2}{10}$, porque $\left(\dfrac{2}{10}\right)^3 = \dfrac{2^3}{10^3} = \dfrac{8}{1000}$

■ **OTRAS RAÍCES**

Del mismo modo, interpretamos raíces de índice superior a 3:

Puesto que $2^5 = 32$, $\sqrt[5]{32} = 2$.

$\sqrt[4]{10\,000} = 10$, porque $10^4 = 10\,000$

En general: si $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}$

a) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{7^2}{4^2} = \dfrac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\dfrac{49}{16}} = \dfrac{7}{4}$.

b) Puesto que piden $\sqrt{4\,356}$, supondremos que 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para comprobarlo, lo descomponemos en factores primos:

$4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\dfrac{1000}{64}} = \dfrac{10}{4}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}} = \dfrac{1}{3}$.

Piensa y practica

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{216}$ c) $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{3\,375}{1\,000}}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

En la web

- Clasifica números.
- Empareja expresiones con el mismo valor.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

1. Escribe la descomposición polinómica de estos números:

a) 3 450 300   b) 0,470286

c) 583,735   d) 39,084

2. Escribe el número que corresponde a cada descomposición:

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

3. Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$ c) $(-2)^{-3}$

d) -3^2 e) -4^{-1} f) $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

4. Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64   b) 243   c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{27}$

5. Expresa como potencia única.

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ b) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$ c) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ e) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$

6. Simplifica.

a) $\frac{2a}{b^2} : \frac{3a^2}{b}$ b) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$ d) $(a^{-1} b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \frac{a^3}{b^2}$ f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2}$

7. Calcula siguiendo el proceso que se indica en el primer apartado.

a) $\frac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^4}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \ldots$

b) $\frac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$ c) $\frac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$

d) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$ e) $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

8. La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$.

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a) $-\sqrt{64}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $-\sqrt{1}$

d) $\sqrt[6]{1}$ e) $-\sqrt{9}$ f) $\sqrt[3]{-8}$

g) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ i) $\sqrt[3]{-1}$

9. Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^7$ b) $5 \cdot 10^{-4}$ c) $9{,}73 \cdot 10^8$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$ f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

10. Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000   b) 0,000005

c) 4 800 000 000   d) 0,0000173

11. Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 *l*/s.

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.

d) Emisión de CO_2: 54 900 000 000 kg.

12. Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora:

a) $(2{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$

c) $(7{,}4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

d) $(1{,}2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$

13. El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

14. El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8{,}4 \cdot 10^6$ € a $1{,}3 \cdot 10^7$ € en tres años.

¿Cuál ha sido la variación porcentual?

15. En España se consumen unos 8,5 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....