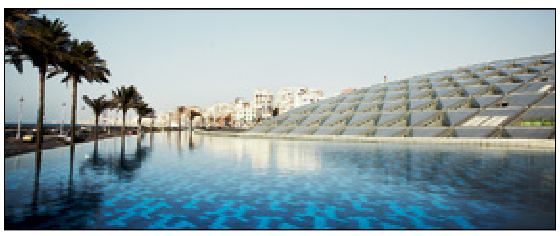
5 Secuencias numéricas

Progresiones geométricas en el siglo III a. C.

Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides** (siglo III a. C.). Fue el fundador de la escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Los elementos*. Se compone de 13 libros, cuatro de ellos dedicados a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas, aunque con nomenclatura muy diferente a la que usamos ahora.



Moderna Biblioteca de Alejandría (Egipto).

Euclides rodeado de discípulos en el cuadro "La escuela de Atenas" de Rafael Sanzio.

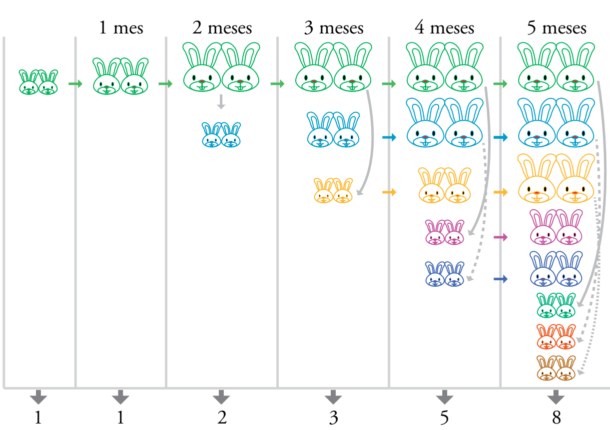
Y las aritméticas, en el siglo I

En el siglo I **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no había tratado Euclides cuatrocientos años antes.

Una sucesión muy famosa

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 …



Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: Fibonacci), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: "¿Cuántas parejas de conejos se producirán a lo largo de un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes?".

Torre de Pisa (Italia).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Sucesiones

En la web
Refuerza el concepto de sucesión.

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero, …

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ \dots$$

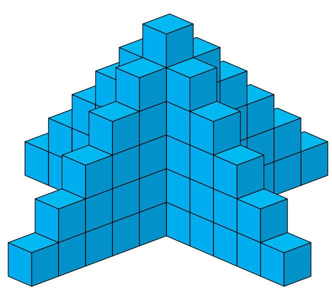
a) $1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+4} 13 \xrightarrow{+4} \dots$

b) $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} \dots$

c) $2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 2} 8 \xrightarrow{\cdot 2} 16 \xrightarrow{\cdot 2} \dots$

d) $1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} \dots$

e) $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad \dots$ ($1 + 1$, $1 + 2$, $2 + 3$)



¿Cuál de las sucesiones anteriores asocias con esta torre?

Ejemplos

a) Los números ordenados 1, 5, 9, 13, 17, 21, … forman una sucesión.

Sus términos son: $a_1 = 1 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 13 \quad \dots$

Esta sucesión se ha construido empezando por 1 y sumando 4 a cada término para obtener el siguiente.

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Es la sucesión de los cuadrados de los números naturales, empezando por 1:

$$b_1 = 1^2 = 1 \qquad b_2 = 2^2 = 4 \qquad b_3 = 3^2 = 9 \qquad b_4 = 4^2 = 16 \qquad \dots$$

También se obtiene sumando los sucesivos números impares: +3, +5, +7, ...

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

Sus términos son las sucesivas potencias de 2, empezando por 2^1:

$$c_1 = 2^1 = 2 \qquad c_2 = 2^2 = 4 \qquad c_3 = 2^3 = 8 \qquad c_4 = 2^4 = 16 \qquad \dots$$

d) 1, 2, 4, 7, 11, 16, …

Empezando por 1, si a un término se le suma el lugar que ocupa, se obtiene el siguiente:

$$d_1 = 1 \qquad d_1 + 1 = 2 = d_2 \qquad d_2 + 2 = 4 = d_3 \qquad d_3 + 3 = 7 = d_4 \qquad \dots$$

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Los dos primeros términos son iguales a 1. A partir de ahí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = 1 \qquad e_3 = 1 + 1 = 2 \qquad e_4 = 1 + 2 = 3 \qquad e_5 = 2 + 3 = 5 \qquad \dots$$

Piensa y practica

1. Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

2. Describe el criterio con el que se ha formado cada una de las seis sucesiones del ejercicio anterior.

3. Forma seis sucesiones que empiecen por 6 y que se construyan con los mismos criterios que las del ejercicio 1.

4. Añade a esta sucesión los cuatro términos siguientes, y describe el criterio con el que se ha formado:

10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, …

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Término general de una sucesión

En la web

Refuerza el concepto de término general de una sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión, s, y se simboliza con s_n, a la expresión que representa un término cualquiera de la misma.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Ejemplo

Para la sucesión 3, 7, 11, 15, 19, …, encontramos la expresión $s_n = 4n - 1$, en la que dando a n los valores 1, 2, 3, …, obtenemos, respectivamente, s_1, s_2, s_3, …

$s_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$ $\quad s_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$ $\quad s_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 11$

$s_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$ $\quad s_5 = 4 \cdot 5 - 1 = 19$ $\quad$ …

$s_n = 4n - 1$ es el **término general** de esta sucesión.

Obtención del término general de algunas sucesiones

a) 1, 2, 3, 4, 5, … $\to a_n = n$

b) 2, 4, 6, 8, 10, … $\to b_n = 2n$

c) 4, 5, 6, 7, 8, … $\to c_n = n + 3$

d) 1, 4, 9, 16, 25, … $\to d_n = n^2$

e) 2, 5, 10, 17, 26, … $\to e_n = n^2 + 1$

f) 2, 4, 8, 16, 32, … $\to f_n = 2^n$

- El término general de la sucesión a) 1, 2, 3, 4, 5, … es $a_n = n$, pues el valor de cada término coincide con el lugar que ocupa.
- El término general de b) 2, 4, 6, 8, 10, … es $b_n = 2n$:

  $b_1 = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad b_2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\quad b_3 = 2 \cdot 3 = 6$ $\quad$ …
- Cada término de la sucesión c) 4, 5, 6, 7, 8, … vale 3 unidades más que el lugar que ocupa. Por tanto, su término general es $c_n = n + 3$.
- Los términos de d) 1, 4, 9, 16, 25, … son los cuadrados de los números naturales. El término general es $d_n = n^2$.
- Si añadimos 1 a los términos de la sucesión anterior, obtenenos e) 2, 5, 10, 17, 26, … El término general es $e_n = n^2 + 1$.
- Los términos de f) 2, 4, 8, 16, 32, … son las sucesivas potencias de 2. Por tanto, el término general es $f_n = 2^n$.

Piensa y practica

5. Asocia cada sucesión con su término general, y exprésalo como en el ejemplo:

- **k) 4, 9, 14, 19, 24, … $\to$ $k_n = 5n - 1$**

a) 7, 8, 9, 10, 11, …

b) –2, –1, 0, 1, 2, …

c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; …

d) 0, 2, 4, 6, 8, …

e) 3, 6, 9, 12, …

f) 4, 7, 10, 13, …

g) 0, 3, 8, 15, 24, …

$n^2 - 1$

$n : 2$

$3n + 1$

$n - 3$

$2(n - 1)$

$3n$

$n + 6$

6. Halla el término general de cada una de estas sucesiones:

a) 2, 3, 4, 5, 6, …

b) 0, 1, 2, 3, 4, …

c) 4, 8, 12, 16, 20, …

d) 4, 7, 10, 13, 16, …

e) 10, 20, 30, 40, 50, …

f) 12, 22, 32, 42, 52, …

g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, …

h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, …

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Sucesiones definidas de forma recurrente

Hay sucesiones en las que el criterio para obtener cada término consiste en operar con los anteriores. Por ejemplo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores, se dice que están dadas en **forma recurrente.**

Cuando conocemos el término general de una sucesión, a partir de él se puede obtener, directamente, cualquiera de sus términos. Sin embargo, mediante una *ley de recurrencia*, para conocer un término es necesario obtener, previamente, todos los anteriores.

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar el término a_{10} de la sucesión 1, 4, 5, 9, 14, …***

Observamos que, a partir de a_3, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

$$5 = 1 + 4 \qquad 9 = 4 + 5 \qquad 14 = 5 + 9$$

Siguiendo ese criterio, formamos todos los términos hasta llegar al décimo:

1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157

Por tanto, $a_{10} = 157$.

$\mathbf{a_1 = 1}$, $\mathbf{a_2 = 4}$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

2. ***Construir una sucesión cuyo primer término es 3 y tal que el siguiente de cada término se obtenga sumándole el lugar que ocupa, n.***

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+4} 13$$

$\mathbf{a_1 = 3}$

$a_{n+1} = a_n + n$

Piensa y practica

1. Para construir estas sucesiones, se han utilizado, no consecutivamente, los criterios que ves debajo:

a) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, …

c) 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, …

d) 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; …

e) 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, …

— Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, …
— Sumar los dos términos anteriores.
— Sumar los tres términos anteriores.
— Restar los dos términos anteriores.
— Promediar los dos términos anteriores.

Identifica cuál corresponde a cada una y continúalas hasta el término s_{10}.

2. Asocia cada sucesión con una de las igualdades que ves a la derecha, y describe verbalmente el criterio con el que se han construido:

a) 40, 39, 37, 34, 30, …

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, …

$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_{n+1} = a_n - n$

3. Observa esta sucesión y calcula los tres términos siguientes:

$$1 \xrightarrow{+2 \cdot 1} 3 \xrightarrow{+2 \cdot 2} 7 \xrightarrow{+2 \cdot 3} 13 \xrightarrow{+2 \cdot 4} 21 \quad \ldots$$

Escribe una igualdad que exprese la relación entre dos términos consecutivos, a_n y a_{n+1}.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando una cantidad constante (positiva o negativa) que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

a) $2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} \dots$

b) $45 \xrightarrow{+5} 50 \xrightarrow{+5} 55 \xrightarrow{+5} 60 \xrightarrow{+5} \dots$

c) $7{,}4 \xrightarrow{+0{,}4} 7{,}8 \xrightarrow{+0{,}4} 8{,}2 \xrightarrow{+0{,}4} 8{,}6 \xrightarrow{+0{,}4} \dots$

d) $8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{-3} 2 \xrightarrow{-3} -1 \xrightarrow{-3} \dots$

Las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:

a) 2, 5, 8, 11, 14, … $\rightarrow$ $d = 3$

b) 45, 50, 55, 60, 65, … $\rightarrow$ $d = 5$

c) 7,4; 7,8; 8,2; 8,6; 9; … $\rightarrow$ $d = 0{,}4$

d) 8, 5, 2, –1, –4, –7, … $\rightarrow$ $d = -3$

Observa que el valor de la constante, d, en cada progresión, es la *diferencia* entre dos términos consecutivos cualesquiera.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda claramente definida si se conocen el primer término, a_1, y la diferencia, d.

Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término a_{100}?

- Para pasar del a_1 al a_{100} hemos de dar 99 pasos.
- Cada paso supone aumentar 3 unidades.
- Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, hemos de añadir al primero $99 \cdot 3 = 297$ unidades.
- Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

El término general, a_n, de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d, se obtiene razonando así:

Para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Ejercicio resuelto

Hallar el término general de las sucesiones b), c) y d) de arriba.

b) $a_1 = 45$, $d = 5$. Por tanto, $a_n = 45 + (n - 1) \cdot 5 = 45 + 5n - 5 = 40 + 5n$.

El término general es $a_n = 40 + 5n$.

c) $a_1 = 7{,}4$; $d = 0{,}4 \rightarrow a_n = 7{,}4 + (n - 1) \cdot 0{,}4 = 7{,}4 + 0{,}4n - 0{,}4 = 7 + 0{,}4n$

El término general es $a_n = 7 + 0{,}4n$.

d) $a_1 = 8$; $d = -3 \rightarrow a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-3) = 8 - 3n + 3 = 11 - 3n$

El término general es $a_n = 11 - 3n$.

Piensa y practica

1. Escribe los diez primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 7.

2. En una progresión aritmética, $a_1 = 10$ y $a_{12} = 54$. Halla la diferencia, d, y el término general, a_n.

3. El término general de una progresión aritmética es $a_n = 10 + 2{,}5n$. Halla a_1 y a_{50}.

4. En una progresión aritmética, $a_1 = 84$ y $a_2 = 79$.

a) Halla d y escribe los ocho primeros términos.

b) Halla el término general.

c) Obtén a_{20}.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Progresiones geométricas

Calculadora

Observa cómo, con una calculadora, se obtienen uno a uno todos los términos de una progresión geométrica de primer término a_1 y razón r:

$$r \boxtimes \boxtimes a_1 \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \dots$$
$$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$$
$$a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5$$

La secuencia $r \boxtimes \boxtimes$ hace que r sea un **factor constante.** Cada vez que se aprieta la tecla $\boxed{=}$, lo que hay en la pantalla se multiplica por r.

Si la calculadora es de pantalla descriptiva, actuaremos así:

$$a_1 \boxed{=} \boxtimes r \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \dots$$
$$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$$
$$a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5$$

En la web

Refuerza el concepto de progresión geométrica.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por una cantidad constante, r, llamada **razón** de la progresión.

Por ejemplo, en la sucesión 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, …, cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

Ejercicios resueltos

1. ***Obtener los primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 3$.***

$$2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 3} 18 \xrightarrow{\cdot 3} 54 \xrightarrow{\cdot 3} 162 \xrightarrow{\cdot 3} 486 \xrightarrow{\cdot 3} \dots$$

2. ***Obtener los primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 200$ y $r = 0{,}5$.***

$$200 \xrightarrow{\cdot 0,5} 100 \xrightarrow{\cdot 0,5} 50 \xrightarrow{\cdot 0,5} 25 \xrightarrow{\cdot 0,5} 12{,}5 \xrightarrow{\cdot 0,5} 6{,}25 \xrightarrow{\cdot 0,5} \dots$$

3. ***En una progresión geométrica, $a_1 = 2$ y $a_2 = 10$. Obtener los siete primeros términos.***

En primer lugar, hemos de hallar la razón. ¿Por cuánto hay que multiplicar 2 para obtener 10? $2 \cdot r = 10 \rightarrow r = 5$

Sabiendo que la razón es 5:

$$2 \xrightarrow{\cdot 5} 10 \xrightarrow{\cdot 5} 50 \xrightarrow{\cdot 5} 250 \xrightarrow{\cdot 5} 1\,250 \xrightarrow{\cdot 5} 6\,250 \xrightarrow{\cdot 5} 31\,250$$

Piensa y practica

1. Halla los seis primeros términos de las progresiones geométricas definidas así:

a) Primer término: 5 000; razón: 1,2

b) Primer término: 8; razón: 2,5

c) Primer término: 1 000 000; razón: 0,2

d) Primer término: 1; razón: 10

2. Considera la progresión 1, 2, 4, 8, 16, …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) ¿Cuál es la razón?

c) ¿Qué lugar ocupa el término $2^7 = 128$?

d) Expresa con una potencia de base 2 el término a_{10} de la progresión.

3. Escribe los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas que están a continuación.

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

c) $c_n = 5 \cdot 10^{n-1}$ d) $d_n = 5 \cdot 0{,}1^{n-1}$

4. Asocia cada progresión geométrica con su término general:

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; …

c) 3, 30, 300, 3 000, …

d) 2, 6, 18, 54, …

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

5. Considera la siguiente progresión:

1; 0,2; 0,04; 0,008; …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) Escribe en forma de potencia el término a_{15} de la progresión.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

1. Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es 5.

b) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –10.

c) El primer término es 5, y el segundo, 7. A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

d) El primer término es 16. Los demás se obtienen dividiendo el anterior por 2.

e) El primer término es 36, el segundo, 12, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

2. Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones. Escribe tres términos más de cada una de ellas:

a) 1, 3, 5, 7, …

b) 7, 5, 3, 1, …

c) 2, 4, 8, 16, …

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

e) 1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …

f) 30, 25, 20, 15, …

g) 1, 4, 9, 16, …

h) 2, 5, 10, 17, …

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

j) 1, 3, 6, 10, …

3. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $n^2 - n$ b) $n^2 + n$ c) $2^n + 1$

d) $\frac{n-1}{n+1}$ e) $\frac{n^2+1}{n}$ f) $\frac{2n-1}{n+1}$

g) $(-1)^n$ h) $1 + (-1)^n$ i) $2^n + n$

4. Escribe el término general de estas sucesiones:

a) 1, 2, 3, 4, … b) 0, 1, 2, 3, …

c) 1, 4, 9, 16, … d) 0, 3, 8, 15, …

e) 2, 4, 6, 8, … f) 1, 3, 5, 7, …

g) 3, 5, 7, 9, … h) 12, 14, 16, 18, …

i) 2, 4, 8, 16, … j) 3, 5, 9, 17, …

k) 100, 200, 300, 400, … l) 5, 25, 125, 625, …

5. Escribe los ocho primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 10 y cuya diferencia es 4. Halla su suma.

6. De las sucesiones siguientes, definidas por sus términos generales, hay tres que son progresiones aritméticas. Identifícalas y di cuál es la diferencia de cada una de ellas:

a) $5n - 4$ b) $5 - 3n$

c) $10 - 0{,}5n$ d) $n^2 + 1$

7. En una progresión aritmética, $a_1 = 6$ y $a_{15} = 41$. Halla:

a) La suma de los 15 primeros términos.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

c) El término centésimo, a_{100}.

8. El término general de una progresión aritmética es $a_n = 4 + 3n$. Halla a_1 y a_{100}.

9. En una progresión aritmética, $a_1 = 103$ y $a_2 = 99$.

a) Halla la diferencia, d, y escribe los 10 primeros términos.

b) Obtén el término general.

c) Halla a_{30}.

10. En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....