9 Funciones y gráficas

Observación de los fenómenos físicos

Sin duda, el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos. En la Antigüedad, la explicación de estos era fruto de la observación y la especulación. Esta actitud se mantuvo durante muchos siglos.

Llega la medición y la cuantificación

No fue hasta finales del siglo XVI, cuando el italiano **Galileo** dio un paso más: consideró imprescindible medir, valorar cuantitativamente causas y efectos, y buscar alguna relación matemática que describiera con sencillez el fenómeno.

Galileo enseñando el uso del telescopio al Dux de Venecia en 1609.

Aunque Galileo no fue el primero en manifestar esta actitud experimental hacia la ciencia (entre otros, **Arquímedes** ya lo hizo dieciocho siglos antes), sí la desarrolló de manera más sistemática y, además, lo supo exponer y transmitir con gran elocuencia.

Galileo Galilei (1564-1642).

Aparición de las funciones

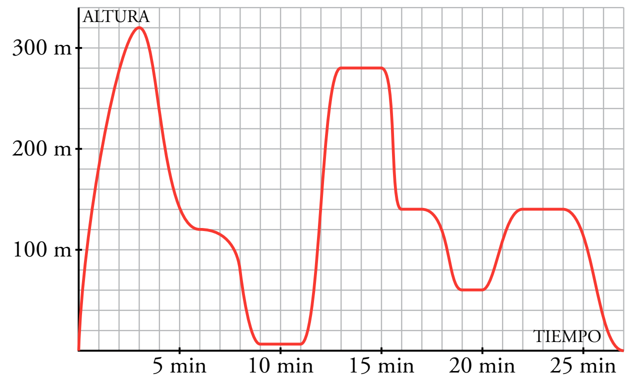
Las investigaciones de Galileo sobre las relaciones matemáticas entre dos variables (x e y, causas y efectos) son un antecedente muy claro del concepto de función que, como objeto de estudio independiente, va tomando forma a lo largo del siglo XVII (**Descartes, Newton** y **Leibniz**) y finalmente queda definido por **Euler** ya en el XVIII.

Sello suizo en honor de Leonhard Euler (1707-1783).

Isaac Newton (1643-1727).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Las funciones y sus gráficas



En la extinción de un incendio, un helicóptero realiza los siguientes movimientos: sale de la base; sube a localizar un embalse; viaja hasta el embalse más cercano; baja a repostar, y vuelve a subir para dirigirse al incendio. Una vez allí, desciende un poco para estudiar por dónde va a atacar el fuego y luego baja a apagarlo. Después, como ya concluye la misión, vuelve a la base.

La gráfica que describe el vuelo del helicóptero relaciona dos variables: el tiempo, t, que ha transcurrido desde que salió de la base, y la altura, a, a la que se encuentra el aparato.

$$\text{tiempo } (t) \rightarrow \text{altura } (a)$$

DOS VARIABLES, DOS EJES

La representación se ha hecho en un diagrama cartesiano:

- En el **eje horizontal,** el tiempo, t.
- En el **eje vertical,** la altura, a.

Cada punto de la gráfica representa un *tiempo* y una *altura,* y significa que en ese instante el helicóptero está a esa altura. Analizando la gráfica, apreciamos las subidas y bajadas del aparato en su vuelo, y podríamos describirlas con cierto detalle.

ESCALAS

En cada eje de la gráfica hay una **escala:**

- En el eje horizontal, un cuadradito significa 1 minuto.
- En el eje vertical, un cuadradito significa 20 metros.

Las escalas de los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el vuelo, sino también cuantificarlo. Por ejemplo: la altura máxima alcanzada por el helicóptero durante la misión es de 320 m, y la alcanza a los 3 minutos.

No lo olvides

En la **descripción cualitativa** se atiende a **cómo** varía una variable respecto a la otra.

En la **descripción cuantitativa** se puede precisar **cuánto** varía.

DOMINIO DE DEFINICIÓN

Esta gráfica se extiende en el tramo 0 – 27. Solo tenemos información del vuelo del helicóptero en este intervalo de tiempo.

El intervalo 0 – 27 se llama **dominio de definición** de la función.

Piensa y practica

1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para llenar agua? ¿Y cuando apaga el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para apagar el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

2. Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Definiciones

Función de...

La expresión "es función de..." significa "depende de...".

El camino recorrido **es función** del tiempo (depende del tiempo).

La temperatura del aire **es función** de la altura (depende de la altura).

El área de un cierto cuadrado **es función** de su lado (depende del lado).

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

- x es la **variable independiente** (en el ejemplo del helicóptero, el tiempo).
- y es la **variable dependiente** (en el ejemplo del helicóptero, la altura).
- La función asocia a cada valor de x un único valor de y. Se dice que y **es función** de x.

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, biológicos, sociológicos o, simplemente, para expresar relaciones matemáticas:

— La *distancia recorrida* por un móvil al pasar el *tiempo*.

— La *temperatura* del aire al variar la *altura*.

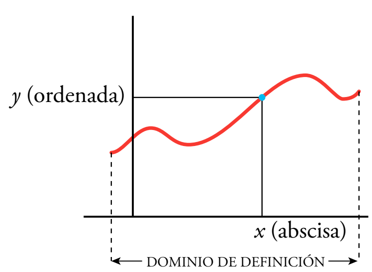
— El *área* de un cuadrado al variar la *longitud de su lado*.

En la web

Refuerza: funciones e interpretación de sus gráficas.

Representación gráfica

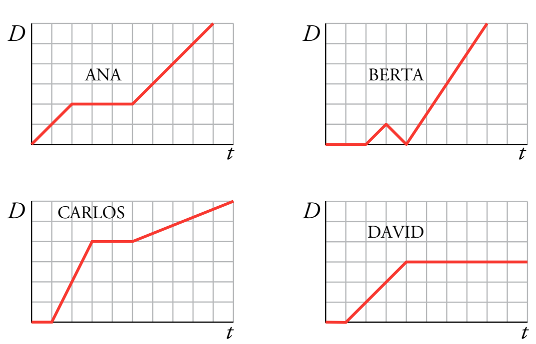
Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica:



- Sobre unos **ejes cartesianos** representamos las dos variables:
  — La x sobre el eje horizontal (eje de **abscisas**).
  — La y sobre el eje vertical (eje de **ordenadas**).
- Cada punto de la gráfica tiene dos **coordenadas,** su abscisa x y su ordenada y.
- El tramo de valores de x para los cuales hay valores de y se llama **dominio de definición** de la función.
- Los ejes deben estar graduados en sendas escalas, de modo que se puedan cuantificar los valores de las dos variables.

Piensa y practica

1. Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (D) - tiempo (t) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo parado?

En la web Interpreta gráficos: "Viaje I", "Dos ciclistas", "Ida y vuelta", "Otros ciclistas".

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

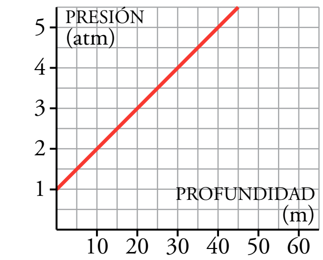
3 Crecimiento y decrecimiento de una función

- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).

  Esta gráfica corresponde a la función:

  profundidad dentro del agua $\rightarrow$ *presión*

  Esta función es *creciente*, pues a más profundidad, más presión.

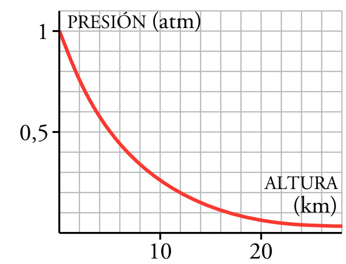


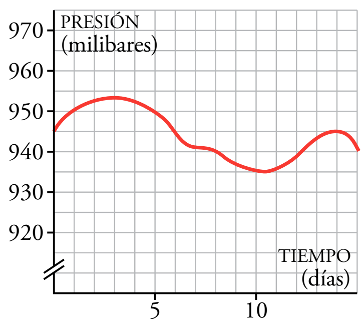
- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.

  Esta gráfica corresponde a la función:

  altura sobre el nivel del mar $\rightarrow$ *presión*

  Es una función *decreciente*, pues a más altura, menos presión.

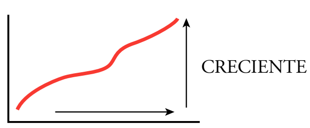


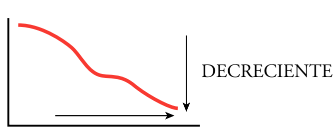


- La variación de la presión atmosférica en un lugar es un indicio importante de cambios en el tiempo meteorológico. La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

  instante de tiempo $\rightarrow$ *presión*

  Presenta tramos en los que es *creciente* y tramos en los que es *decreciente*.





Para estudiar las variaciones de una función *hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha*, es decir, hemos de ver cómo varía y cuando x aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y.

También decimos que una función tiene **un tramo creciente** o **decreciente.**

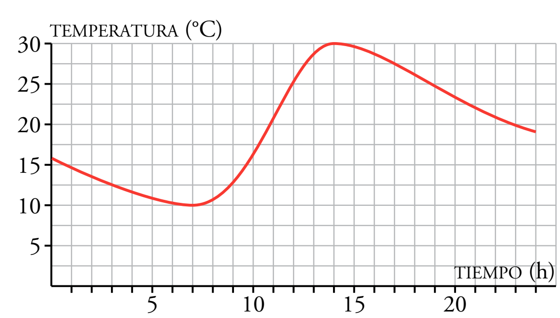
Piensa y practica

1. La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



En la web Refuerza: crecimiento y decrecimiento de una función.

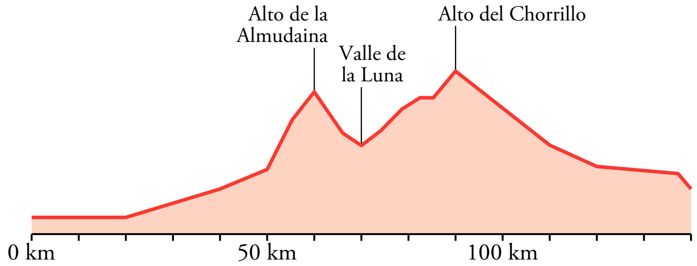
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Máximos y mínimos relativos

Esta gráfica refleja el perfil de una etapa de la Vuelta a España. Corresponde a la función *distancia* → *altura.*

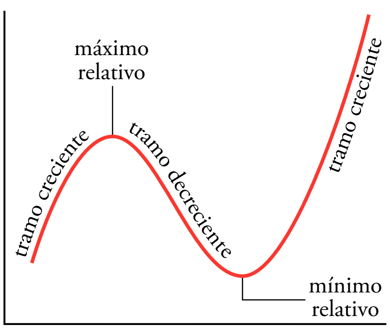
La altura a la que ruedan los ciclistas es función del kilómetro por el que van.

La gráfica representa un tramo creciente desde la salida hasta el Alto de la Almudaina. A partir de ahí hay un tramo decreciente hasta el Valle de la Luna. Donde vuelve a crecer hasta el Alto del Chorrillo. Desde este alto, en el siguiente tramo, que llega hasta la meta, la gráfica es decreciente.



En el perfil de la etapa se aprecian claramente dos *máximos relativos* (kilómetros 60 y 90) y un *mínimo relativo* (kilómetro 70).

La altura crece hasta llegar al máximo relativo; decrece a partir de este.



Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del máximo relativo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo relativo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

Piensa y practica

1. La gráfica de la derecha muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes.

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

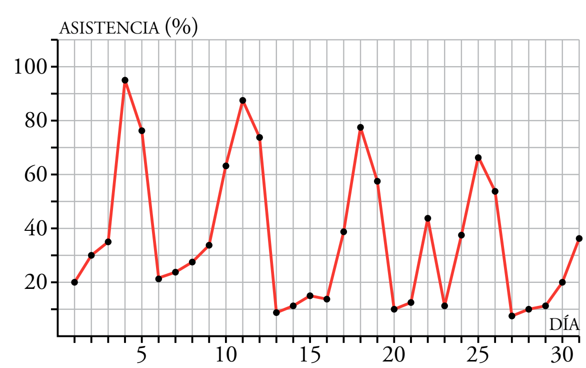
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

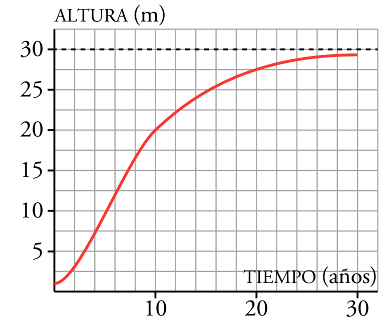
e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Tendencias de una función



Comportamiento a largo plazo

La gráfica del margen muestra la evolución de la altura de un árbol de eucaliptus a lo largo de 30 años. Representa la función:

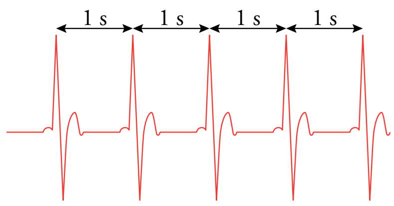
tiempo $\longrightarrow$ *altura*

Es claro que, al pasar el tiempo, la altura del árbol se acerca a 30 m, su tope. Decimos, entonces, que la altura del árbol **tiende** a 30 m con el transcurso del tiempo.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarían lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Observa otros ejemplos en los que la gráfica de la función tiende a estabilizarse:

- Velocidad de un paracaidista en caída libre (tiende a 200 km/h).
- Temperatura de un refresco al sacarlo de la nevera (tiende a la temperatura de la habitación).



Periodicidad

A veces, aunque solo conozcamos un trozo de curva, podemos saber cómo se comporta la función fuera de ese tramo.

Un electrocardiograma recoge los impulsos eléctricos del corazón y los refleja en una gráfica. La del margen muestra el electrocardiograma de un paciente sano en estado de relajación. La función es:

tiempo $\longrightarrow$ *intensidad eléctrica*

Como se repite una y otra vez cada segundo, podemos decir que es una función *periódica* de *periodo* 1 segundo.

Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **periodo.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un periodo.

Ejemplos

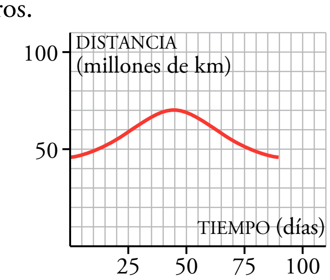
Otros ejemplos de funciones periódicas son:

- Altura a la que se encuentra una cesta cuando la noria está en funcionamiento.
- Distancia al Sol del cometa Halley.

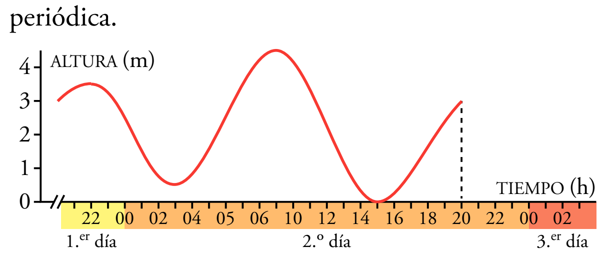
Piensa y practica

1. Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

Completa la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.



2. La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica.



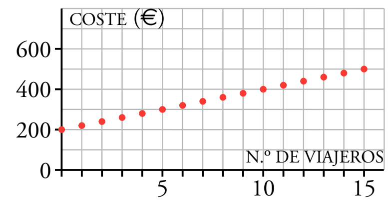
En la web Refuerza: función periódica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Discontinuidades. Continuidad

- Por el alquiler de un autobús nos cobran 200 € fijos más 20 € por viajero. La gráfica de la derecha muestra la función:

  número de viajeros ⟶ coste

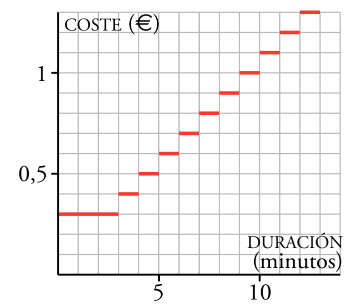


La variable independiente solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4… y no los intermedios, ya que no tiene sentido un número fraccionario de viajeros. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.

- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

  duración ⟶ coste

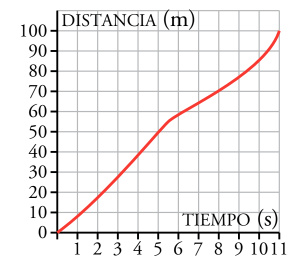
  Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.

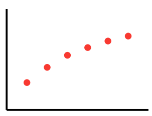


- La siguiente gráfica describe la distancia recorrida por un velocista con el paso del tiempo. Se trata de la función:

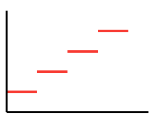
  tiempo ⟶ distancia

  La variación de la distancia es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua.**

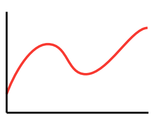




Función discontinua



Función discontinua



Función continua

Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo,** aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Piensa y practica

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

a) Representa esta función:

número de atracciones ⟶ coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

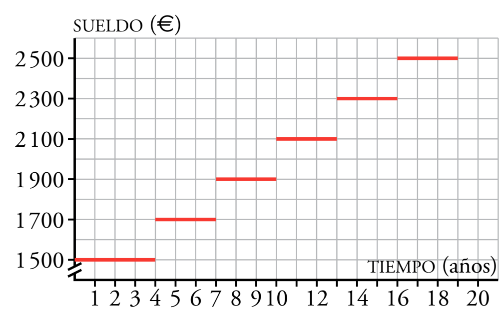
c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

2. La gráfica de la derecha muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



En la web Resuelve los problemas: "Tarifas postales", "El depósito".

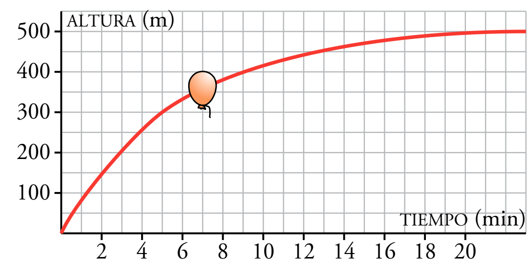
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1. Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:



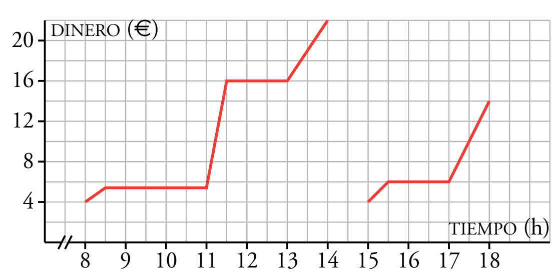
a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

2. En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

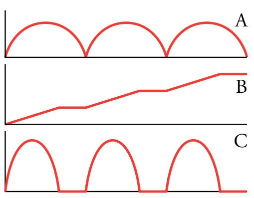
b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

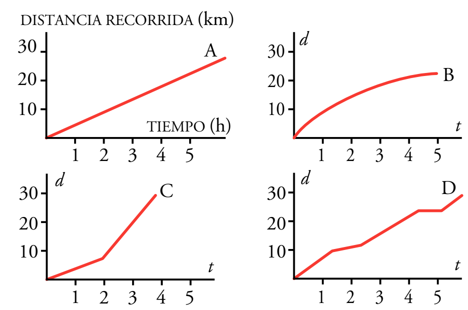
d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

3. Una rana avanza dando tres saltos. Una de estas gráficas describe la altura a la que se encuentra al pasar el tiempo. Otra muestra la distancia que recorre a lo largo de ese tiempo, y la otra no vale. Di cuál es cuál.



4. Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:

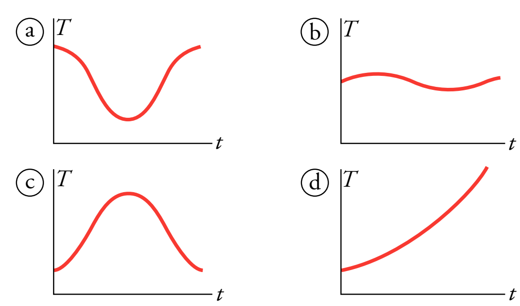


a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

5. Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de a y b, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....