Cuaderno de apoyo
Matemáticas
4º E.S.O.

Nombre:……………………………………………………………
………………………………………………………………………..

Curso:………………………………………………………….

1º NÚMEROS REALES. NOTACIÓN CIENTÍFICA

1.- Escribe en todas las formas posibles los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $\{ x / -2 \leq x < 3\}$

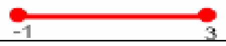
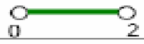
b) Números mayores que –1

c) $(-\infty, -5]$

d) Números mayores o iguales que –7 y menores que 19.

e) Números mayores que 9 y menores que 5.

2.- Completa la siguiente tabla.

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	{x∈IR/ -1≤x≤3}
2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|≥3}
16			

2.- Expresar en notación científica los siguientes números

1. 2000000
2. 0,0000002
3. 9850000000
4. 124,4444
5. 23994,099
6. 123400000000
7. 34900000000000
8. 0,000000000123
9. 23456,1100
10. 1987000000000
11. 0,000000000000000011
12. 298000000000000000
13. 2,1222
14. 123000000
15. 432,123
16. 12345,02
17. 123,45687
18. 2330000000000000

3.- Realizar las siguientes operaciones en notación científicas, expresando el resultado con una cifra entera y el resto decimales:

1. $20,3483\ 10^{3}.\ 0,002\ 10^{-4}$
2. $213,25\ 10^{-4}\ /\ 3,13\ 10^{-6}$
3. $0,0123\ 10^{-5}\ .\ 3,33\ 10^{-1}$
4. $15000\ 10^{6}\ .\ 31,15\ 10^{6}$
5. $0,0001\ 10^{8}/\ 31,23\ 10^{3}$
6. $-2.3244\ 10^{-7}\ .\ 23,22\ 10^{4}$
7. $31,21\ 10^{4}\ /\ 2,22\ 10^{12}$
8. $21.12\ 10^{-3}\ /\ 0.0000002$
9. $10000000000.\ 2,22\ 10^{-7}$
10. $2,3333\ 10^{-5}\ .\ 3,25\ 10^{8}$
11. $0,3333\ 10^{-3}\ .\ 1,15\ 10^{8}$
12. $2,3333\ 10^{-5}\ .\ 3,25\ 10^{8}$
13. $0,00000003\ .1,2\ 10^{-8}$
14. $10000000\ ,\ 5,33\ 10^{5}$

4. Opera:

a) $(7,25.10^{-7}).(6,02.10^{23})$ b) $\dfrac{1,01.10^{-6}}{3,02.10^{-5}}$ c) $(6,02.10^{10}).(12.10^{9})$

d) $6.10^{2}+4.10^{3}$ e) $0,00532+25,1.10^{-3}$ f) $3,24.10^{-5}+3,78.10^{-6}+8,04.10^{-4}$

5. Efectúa en notación científica las siguientes operaciones, dando el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{(4,16.10^{-5}+3,84.10^{-4})(3,4.10^{6})}{5,843.10^{-11}}$ b) $\dfrac{(42,4.10^{14}-375,6.10^{13})(2.10^{-6}-7,5.10^{-7})}{9,38.10^{6}}$

c) $\dfrac{5,433.10^{3}-4,3.10^{3}+23,2.10^{2}}{8,5.10^{-3}-456.10^{-5}}$ d) $\dfrac{4,63.10^{-4}+3,654.10^{-4}-400.10^{-6}}{5.10^{2}+6,2.10^{3}}$

2º POTENCIAS Y RADICALES

Propiedades de las potencias

1º) $a^{n}\ .\ a^{m}=a^{n+m}$	**2º)** $a^{n}\ :\ a^{m}=a^{n-m}$	**3º)** $(a^{n})^{m}=a^{n.m}$	**4º)** $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$

1. Operar y simplificar:

1) $\dfrac{\dfrac{a^2.a^3}{a^5.a^4}}{\dfrac{a^2.a}{a^3}}:\dfrac{a^5}{a^3.a}$ **2)** $\dfrac{\dfrac{a.a^5}{a^7.a^2}}{\dfrac{a^2.a}{a^3.a}}.\dfrac{a^5.a}{\dfrac{a^3.a}{a^3.a}}$ **3)** $\dfrac{(x^3:x^2).(x^2:x)}{x^0.x^2.x^{-2}}$ **4)** $\left[\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^4.\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]^2$

6) $\dfrac{1024.\left(\frac{1}{2}\right)^3(2^3)^4}{(16)^3\left(\frac{1}{4}\right)^6 2^{-3}}$ **7)** $\dfrac{a^2b^3(a^{-3}b)^4}{((a^3b^2)^3)^2a^4b^6}$ **8)** $\dfrac{x^2y^{-4}(x^3y^{-2})^4(x^{-1}y^2)^4}{(x^3y^2)^3y^{-5}}$ **9)** $\dfrac{2a^3 64(a^3)^4}{2^4a^4\left(\frac{1}{a}\right)^3}$

10) $\left(\dfrac{a^3(b^2)^{-1}ab^3((a^2b^4)^3)^2}{\dfrac{a^2b^3}{a^4b^2}}\right)^3$ **11)** $\dfrac{81\left(\frac{1}{3}\right)^2 3^{-4}(27)^3}{((3)^2)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}}$ **12)** $\dfrac{a^2(a^3b^2)^{-3}ab^3}{((a^2b^4)^3)^2}$

12) $\dfrac{(a^2)^3b^2(a^{-3}b)^4}{((a^3b^2)^3)^2a^4\left(\frac{1}{ab}\right)^3}$ **13)** $\dfrac{32a^4 64(a^3)^{-4}}{(2^4)^2a^5\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}}$ **14)** $\dfrac{x^2y^{-4}(x^3y^{-2})^4(x^{-1}y^2)^4}{(x^3y^2)^2\left(\frac{1}{xy}\right)^2}$

Propiedades de los radicales

1º) $\sqrt[a]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$	**2º)** $\sqrt[a]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$	**3º)** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	**4º)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

5º) El producto (división) de dos radicales de distinto índice es otro radical de índice el m.c.m de los índices y en su interior los la multiplicación (división) de los radicandos elevados al resultado de dividir el m.c.m entre su índice

Ejemplos : $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2 b^3}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$

6º) Para extraer de un radical se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz , el cociente son los que salen y el resto los que se quedan:

Ejemplo: $\sqrt[3]{x^{11}} = x^3 \sqrt[3]{x^2}$

7º) Para introducir un factor en un radical multiplicamos el exponente por el índice del radical

Ejemplo: $x^2 \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^6 y}$

1.- Escribe como potencias de exponente fraccionario y simplifica:

$1.-\sqrt[5]{xy^3}$ $\quad 2.-\sqrt{\sqrt[3]{xy^2}}$ $\quad 3.-\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\quad 4-\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}\sqrt{b}}.\sqrt{b\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}}$ $\quad 5-\sqrt{\dfrac{5x^2}{y^4}}$ $\quad 6.-\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

$7-\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{3}}\sqrt[3]{3^2}}$ $\quad 8.-\dfrac{\sqrt{ax}\sqrt[3]{xa^2}}{\sqrt{x^3}\sqrt[6]{a^5x}}$ $\quad 9.-\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}}$ $\quad 10.-\sqrt{3\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3^2}\sqrt{3}}}$ $\quad 11.-\dfrac{\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt[3]{y^2x^2}}$ $\quad 12.-\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{x^2}}$

2.-Simplifica y reduce las siguientes expresiones a potencias:

$1.-\left(\sqrt{x\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\right)^3$ $\quad 2.-\dfrac{\left((2^3)^{-2}\left(3^{2/3}\right)\right)^{1/2}}{\sqrt{2^{10}}\,3^{1/3}}$ $\quad 3.-\dfrac{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \div \sqrt[4]{a^3}}{\dfrac{\sqrt[6]{a^5}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}}}.$ $\quad 4.-\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} \div \sqrt{a}}{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} \div \sqrt[8]{a}}$ $\quad 5.-\sqrt[4]{x^3\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}}$

$6.-\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{\dfrac{x}{y}}}}$ $\quad 7.-\dfrac{x^{-1}a^{-1/3}b^6c^{-1}}{a^2\sqrt{b}x^{1/3}c}$ $\quad 8.-\dfrac{x^{-2}\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x\sqrt[3]{yx^2}}}$ $\quad 9.-x^4\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{\sqrt{x^4}}$ $\quad 10.-\sqrt{xy^3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}}$

3.- Extrae todos los factores posibles:

$1^o -2x^2y\sqrt{x^4y^3}$ $\quad 2^o.-\sqrt[5]{\dfrac{5x^{10}y^6z^5}{t^8}}$ $\quad 3^o.-\sqrt[3]{\dfrac{8x^4y^3z}{m^7n^6}}$ $\quad 4^o.-\sqrt{\dfrac{1024x^4y^7}{z^9}}$ $\quad .5^o.-\sqrt[3]{\dfrac{x^4y^{13}}{625}}$

$6^o.-\sqrt{50x^5y^7}$ $\quad 7^o.-\sqrt[7]{x^{10}y^{-13}z^{43}}$ $\quad 8^o.-\sqrt[4]{\dfrac{a^6b^7}{z^4}}$ $\quad 9^o.-\sqrt{128x^{-5}y^6}$ $\quad .10^o.-\sqrt[4]{\dfrac{x^{18}y^{23}}{z^{16}}}$

$11^o.-\sqrt{200x^3y^3}$ $\quad 12^o.-\sqrt[3]{125t^3h^4x^{12}}$ $\quad 13^o.-\sqrt[4]{1000}$ $\quad 14^o.-\sqrt[4]{625x^5a^6}$

$15^o\ \sqrt{32x^3y^7z^{12}t^{15}}$ $\quad 16^o\ \sqrt[3]{125a^5b^{10}c^{12}}$ $\quad 18^o\ \sqrt[4]{1024x^9y^{23}z^{12}}$ $\quad 19^o.-\sqrt[4]{81a^4b^8}$

4.- Introduce dentro del radical y simplifica:

$1.-x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ $\quad 2.-x^3y\sqrt[3]{xy}$ $\quad 3.-\dfrac{3}{2xy}\sqrt[4]{\dfrac{2x^2z}{y^3}}$ $\quad 4-\dfrac{3a}{5xz}\sqrt[3]{\dfrac{125x^4a}{27a^2}}$ $\quad 5-\dfrac{x^2}{y^3}\sqrt{\dfrac{x^4y^3}{x^{-3}}}$ $\quad 6-\dfrac{x^3}{y^4}\sqrt{\dfrac{x^4y^4}{x^{-2}}}$

5.- Realizar las siguientes operaciones:

$a)\quad \frac{3}{4}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{8}\qquad b)\quad \sqrt[4]{27z^3}.\sqrt[4]{3z}\qquad c)\quad \sqrt[3]{a^2h^2}:\sqrt[3]{a^3h^4}\qquad d)\quad \sqrt[3]{16}:\sqrt{2}$

$e)\quad 3\sqrt{4}.4\sqrt[3]{3}\qquad f)\quad \sqrt{3x}:\sqrt[4]{3x}\qquad g)\ \sqrt[4]{x^2y^3}\ \sqrt{xy}\ \sqrt[3]{x^2y^{-2}}\qquad h)\ \sqrt[6]{x^4y^5}\ \sqrt{xy}\ \sqrt[3]{x\ y^{-2}}$

6.- Efectúa las siguientes operaciones con radicales:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y}}{\sqrt[6]{x^4y^5}}$

i) $\dfrac{\sqrt{a^2b^3}\ \sqrt[3]{a^3b^3}\ \sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a\ b^3}\ (a^{-3}b^3)^3}$

p) $\dfrac{\sqrt{a^3b}\ \sqrt[4]{a^2b^2}\ \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2b^4}\ (a^{-2}b^3)^2}$

b) $\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}}$

j) $\sqrt[3]{a^2b}\ \sqrt{a^2\ b^3}\ \sqrt[4]{a^3\ b^2}$

q) $\dfrac{\sqrt[4]{xy^3}\ \sqrt{x^2y^3}}{\sqrt{xy}\ \sqrt[6]{x^3y^4}}$

c) $\sqrt[4]{xy^3}\ \sqrt{x^2y^3}$

k) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^4}\ \sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt{xy^2}\ \sqrt[6]{x^2y^2}}$

r) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}}\ \sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt{b}\ \sqrt[3]{a}}$

d) $\dfrac{\sqrt{ab}\ \sqrt{a^3b}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{ab}}}}$

l) $\sqrt[3]{x^4\ y}\ \sqrt[3]{x\ y^2}\ \sqrt[6]{x^3\ y^5}$

s) $a^2\ b^{-3}\ \sqrt{a^3b^3}\ \ a^4b^3\ \sqrt[3]{a^4b}$

e) $\sqrt{x\ y}\ \sqrt[6]{x^2y^2}$

m) $\sqrt[3]{1024x^2y^3}.\sqrt{8xy}\ \sqrt[4]{2x^2y^3}$

t) $\sqrt[3]{32x^4y^2}.\sqrt{128x^3y}\ \sqrt[4]{2x^2y^{-2}}$

f) $\dfrac{\sqrt{a^3b}\ \sqrt{a\ b}}{\sqrt[3]{a^2b^4}\ \sqrt[6]{a^2b}}$

n) $\dfrac{\sqrt{ay^4}\ \sqrt[3]{a^2y^3}}{\sqrt{a^{-3}y^2}\ \sqrt[4]{a^3y^2}}$

u) $\sqrt[3]{625z^2t^3}.\sqrt{125zt}\ \sqrt[6]{5z^2t^3}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^4}\ \sqrt[3]{x^2y^3}}{\sqrt{xy}\ \sqrt[15]{x^5y^2}}$

ñ) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{xy}\ \sqrt[3]{x^2y}}{(x^2y^3)^3}}$

v) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^4}\ \sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt{a\ b}\ \sqrt[3]{a^2b^2}}$

o) $\sqrt[4]{xy^3}\ \sqrt{x^2y^3}\ \sqrt[3]{1024x^2y^3}.\sqrt{8xy}$

w) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}\sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$

7. Sumar los siguientes radicales

1. $\sqrt{18}+2\sqrt{50}-2\sqrt{2}-\sqrt{8}$

2. $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}+2\sqrt{2a}$

3. $\sqrt{75}+2\sqrt{27}+4\sqrt{12}-3\sqrt{3}$

4. $\sqrt{28}-3\sqrt{7}-5\sqrt{28}+3\sqrt{63}-2\sqrt{175}$

5. $\sqrt{8}+5\sqrt{18}-\sqrt{200}+3\sqrt{98}$

6. $3\cdot\sqrt{8}-2\cdot\sqrt{18}+\sqrt{32}-5\cdot\sqrt{50}$

7. $\sqrt{108}+2\cdot\sqrt{48}-\sqrt{27}-3\sqrt{147}$

8. $3\sqrt{48}-4\sqrt{27}+5\sqrt{75}+6\sqrt{3}$

9. $\sqrt{32}+4\sqrt{50}-3\sqrt{98}-7\sqrt{128}$

10. $\sqrt{108}+2\cdot\sqrt{48}-\sqrt{27}-3\sqrt{147}$

11. $\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{250}$

12. $\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{625}$

13. $\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{56}+4\sqrt[3]{2401}$

14. $\sqrt[3]{432}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}$

15. $\sqrt{245}+4\sqrt{180}-3\sqrt{45}$

Racionalizar

Consiste en eliminar raíces del denominador. Existen varios procedimientos

1er Tipo: Denominador con raíz cuadrada $\frac{a}{\sqrt{b}}$	Se multiplica numerador y denominador por la raíz : $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$
2º Tipo : Denominador con raíz de índice superior $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$	Se multiplica y divide por una raíz con el mismo índice y el radicando elevado a la diferencia entre el índice y el exponte del radicando $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$
3er Tipo: Denominador con raíces sumadas o restadas $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$	Se multiplica y divide por las raíces conjugadas y se aplica la identidad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$

1.- Racionalizar las siguientes expresiones:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

4) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

5) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

6) $\frac{2}{3\sqrt{11}}$

7) $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$

8) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}$

9) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$

10) $\frac{2a}{\sqrt{2a}}$

11) $\frac{4}{\sqrt[5]{8}}$

12) $\frac{2}{\sqrt[5]{27}}$

13) $\frac{5}{\sqrt[4]{125}}$

14) $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$

15) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

16) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$

17) $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$

18) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

19) $\frac{3}{\sqrt[4]{125}}$

20) $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$

21) $\frac{5}{\sqrt[4]{25}}$

22) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

23) $\frac{a^4}{\sqrt[4]{a^3}}$

24) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

25) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

26) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

27) $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$

28) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

29) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

30) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

31) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

32) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

33) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

34) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

35) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

36) $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$

37) $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

38) $\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$

39) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

40) $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

41) $\frac{\sqrt{5}}{4-\sqrt{3}}$

42) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

43) $\frac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

44) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

45) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

46) $\frac{a^2-2ab+b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

47) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3º POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Definiciones:	Ejemplos
Valor numérico de una expresión algebraica: Es el número que se obtiene al sustituir las letras por los números dados.	**Ejemplo:** $x^3 - 6x + 5$ en $x=1$ $(1)^3-6(1)+5=0$
Suma y diferencia de polinomios. Es el polinomio que se obtiene al reducir (sumar o restar) los términos semejantes (de igual grado)	**Ejemplo:** $(4x^3 - 12x + 10) - (3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 14) =$ $-3x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 12x + 24$
Multiplicación de un polinomio por un número: Se multiplican todos los términos del polinomio por dicho número	**Ejemplo:** $2(2x^3 - 6x + 5)= 4x^3 - 12x + 10$
Producto de un polinomio por un monomio: Es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando el monomio por cada término del polinomio:	**Ejemplo:** $2x^2(2x^3 - 6x + 5)= 4x^3 - 12x^3 + 10x^2$

Producto de polinomios: Es otro polinomios cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y sumando luego los términos semejantes. Si tienen muchos términos se colocan los monomios del mismo grado uno debajo de otro luego se multiplican y se suman

Ejemplos

$(2x^2 - 6x)(3x - 5) =$
$=6x^3 - 10x^2 - 18x^2 + 30x =$
$= 6x^3 - 28x^2 + 30x$

$(-7x^3+3x^2+2)(2x^2+3x-1)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -7x^3 & +3x^2 & & +2 \\
 & & & 2x^2 & +3x & -1 \\
\hline
 & & -7x^3 & -3x^2 & & -2 \\
 & -21x^4 & +9x^3 & & +6x & \\
-14x^5 & +6x^4 & & +4x^2 & & \\
\hline
-14x^5 & -15x^4 & +2x^3 & +x^2 & +6x & -2
\end{array}$$

La división de polinomios es similar a la división de números. El dividendo y el divisor deben de estar ordenados en orden decreciente. Vamos dividiendo los monomios de mayor grado del dividendo y los dividendos parciales entre el divisor. Multiplicamos el monomio resultado de esta división por el divisor y el resultado se lo restamos al dividendo parcial La división acaba cuando el grado del dividendo parcial es menor que el grado del divisor.

Ejemplo : Calcular Q(x) : P(x), siendo: $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7$ y $P(x) = x^2 - 5x$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 - 6x^2 \qquad - 7 & x^2 - 5x \\
\underline{-x^4 + 5x^3} & \overline{x^2 + 7x + 29} \\
\quad 7x^3 - 6x^2 & \\
\quad \underline{-7x^3 + 35x^2} & \\
\qquad 29x^2 & \\
\qquad \underline{-29x^2 + 145x} & \\
\qquad\qquad 145x - 7 &
\end{array}$$

Dividendo = $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7$
Divisor = $P(x) = x^2 - 5x$
Cociente = $x^2 + 7x + 29$
Resto = $145x - 7$

1.- Dados los polinomios $A(x)= x^5 - 25x^3 + 2x-3$; $B(x)= x^2 - 3x - 1$;$C(x)= x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ $D(x)= 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 2$ .Calcula:

a) A(x)+B(x)+C(x)+D(x)
b) A(x) - B(x) -C(x)+D(x)
c) A(x)+B(x) - C(x) - D(x)
d) -A(x)+B(x)+C(x) - D(x)
e) A(x) - 2B(x) -C(x)+3D(x)
f) 3A(x) - B(x) +2C(x)-D(x)

2.- Realiza las siguientes operaciones con los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 6x + 5$; $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7$; $R(x) = x^2 - 3x-2$

a) P(x) + Q(x) + R(x)
b) P(x)+Q(x) –R(x)
c) 2Q(x) – 5R(x) + 3P(x)
d) Q(x) . R(x)
e) 3R(x)[Q(x) – 3R(x)]
f) P(x)[5R(x) – 2Q(x)]

3.- Realizar las siguientes divisiones de polinomios y hacer la prueba.

1. $(x^3 + 3x^2 - 4x - 5) : (x^2 - 2x - 2)$
2. $(x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 3) : (x^2 + 4x - 2)$
3. $(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x^2 - 3x - 2)$
4. $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x^2 + 3x - 2)$
5. $(x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 + 3x - 5)$
6. $(x^5 + 6x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2) : (x^2 + 2x - 2)$
7. $(x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x^2 + 2x - 1)$
8. $(x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^3 - 2x^2 + 2x - 5)$
9. $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2) : (x^3 - x^2 - 2x - 2)$
10. $(x^4 - 3x^2 + 5x - 2) : (x^2 - 4x - 2)$

IDENTIDADES NOTABLES	
Fórmula	**Ejemplo**
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(3x^3 - 5xy)(3x^3 + 5xy) = (9x^6 - 25x^2y^2)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(5y^2 + 3x)^2 = 25y^4 + 30y^2x + 9x^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(6y^2 - 2y)^2 = 36y^4 - 24y^3 + 4y^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x^2 - 2x)^3 = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

1.- Utilizar las fórmulas de las identidades notables para realizar.

1. $(3y^2 + 2x)(3y^2 - 2x)$
2. $(3y^2 + 2x)(3y^2 - 2x)$
3. $(2x^2 - 3)(2x^2 + 3)$
4. $(3y^2 + x^3)(3y^2 - x^3)$
5. $(\sqrt{2}\,x - y^2)(\sqrt{2}\,x + y^2)$
6. $(z^2 + 2yx^2)(z^2 - 2yx^2)$
7. $(\frac{x}{2} - y)(\frac{x}{2} + y)$
8. $(\frac{x^2}{3} - 2y)(\frac{x^2}{3} + 2y)$
9. $(\sqrt{5}\,a^2b - c^3)^2$
10. $(3x+2)^2$
11. $(3y^2-2x^2)^2$
12. $(\frac{x}{3} - 3y)^2$
13. $(4x + \frac{5}{y})^2$
14. $(2x - \frac{y}{3})^2$
15. $(\frac{3}{x} + y^2)^2$
16. $(3y + 2x)^2$
17. $(3xy - 2x^2)^2$
18. $(2xy^2 - 3y)^2$
19. $(ab - 2a^2)^2$
20. $(\sqrt{3} - y)^2$
21. $(2x + \frac{y}{2})^2$
22. $(\sqrt{2}\,x - y^2)^2$
23. $((\frac{\sqrt{2x}}{4} - y)^2$
24. $(z^2+2y)^3$
25. $(x+2y)^3$
26. $((2y - 3)^3$
27. $(x+2y)^3$
28. $(2x-y)^3$
29. $(x^2-3y)^3$
30. $(3x+y)^3$

2º Escribir las siguientes sumas como una identidad notable:

1. x^2-y^2
2. x^4-4y^2
3. $5x^6-4y^4$
4. $4x^2y^2-4z^2$
5. $16x^8-25y^4$
6. $25x^4-9y^2$
7. $\frac{x^2}{4} - 9y^2$
8. $16x^4-25$
9. $25x^2y^2-16$
10. $16x^4 - \frac{1}{4}$
11. $\frac{x^2}{16} - 25y^4$
12. $\frac{x}{y^2} - 9y^2$
13. $4x^4+4x^2+1$
14. $9x^4+6x^2+1$
15. $x^2 + 4x + 4$
16. $25x^2 - 30x + 9$
17. $x^2 - 12x + 4$
18. $4x^2-40x+25$
19. $5x^6-9y^2z^2$
20. $x^2+2xy+y^2$
21. $x^2+4xy+4y^2$
22. $x^4-6x^2y+9y^2$
23. $4x^2+12xy^2+9y^4$
24. $25x^2+20xy^3+4y^6$
25. $16x^8-8x^4y^3+y^6$
26. $x^6-6x^3y^2+9y^4$
27. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
28. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
29. $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
30. $125x^3+75x^2y+15xy^2+y^3$
31. $x^3-15x^2y+75xy^2-125y^3$
32. $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$
33. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS - MCM

Definiciones:

Factorizar un polinomio: Descomponer un polinomio como producto de factores primos.

Factor primo: En el caso de los polinomios, son polinomios que no tienen más raíces reales, por lo tanto aquellos que no se pueden descomponer en factores más simples.

Mínimo común múltiplo: Una vez descompuestos en factores primos los polinomios, se eligen los factores que sean comunes a todos los polinomios elevados al mayor exponente y se multiplican por todos los factores que no sean comunes.

Ejemplos

1) Factorizar un polinomio

a) Si no tiene término independiente se saca x o x^n factor común **Ejemplo**: $2x^5 - 6x^3 + 4x^2$;

Sacamos $2x^2$ factor común a los tres sumandos $\Rightarrow 2x^2(x^3 - 3x + 2)$

El polinomio $(x^3 - 3x + 2)$ se factoriza como se explica a continuación

b) Si tiene término independiente se buscan sus raíces utilizando el método de Ruffini

Se factoriza del siguiente modo $P(x) = (x - \text{raíz}_1)(x - \text{raíz}_2)....$

Ejemplo: $x^3 - 3x + 2 \Rightarrow$

	1	0	-3	2
Raíz = 1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Debemos buscar un número, divisor del término independiente, tal que el resto de la división sea 0.

Por lo tanto el polinomio se factoriza del siguiente modo $(x - 1)^2(x + 2)$

La factorización final de $2x^5 - 6x^3 + 4x^2$ será: $2x^5 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^3 - 3x + 2) = 2x^2(x - 1)^2(x + 2)$

2) Calcular el MCM

a) Se factorizan todos los polinomios siguiendo el procedimiento anterior.

Ejemplo: Halla el MCM de los siguientes polinomios: $x^5 - 4x^3$; $2x^5 - 6x^3 + 4x^2$; $x^2 + 4x + 4$.

$x^5 - 4x^3 = x^3(x - 2)(x + 2)$

$2x^5 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x - 1)^2(x + 2)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) Se toman todos los factores que sean comunes a todos los polinomios elevados a la mayor potencia y los factores que no sean comunes y se multiplican

$MCM = 2x^3(x + 2)^2(x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$

REGLA DE RUFFINI

Definición: Es un método para dividir un polinomio entre $x \pm a$

Ejemplo : Dividir $4x^3-7x^2+5x-6$ por $x - 2$

	4	-7	5	-6
2		8	2	14
	4	1	7	$\boxed{8}$

En diagonal se multiplican en vertical se suman

$\boxed{8}$ = Resto Cociente : $4x^2+x+7$

Cociente

Teorema del resto: El valor numérico de un polinomio para x=a es igual al resto de la división

Ejemplo : Calcular el valor numérico de $P(x)= x^3-3x^2+5x-8$ para x=2

	1	-3	5	-8
2		2	-2	6
	1	-1	3	$\boxed{-2}$

En diagonal se multiplican en vertical se suman

$\boxed{-2}$ = Resto P(2)= -2

Ejemplo : Calcular el valor de k $P(x)= x^3-3x^2+kx-2$ para que P(x) tenga el valor 8 en x=2

	1	-3	k	-2
2		2	-2	2k-4
	1	-1	k-2	$\boxed{2k-6}$

En diagonal se multiplican en vertical se suman

Despejamos K en la ecuación

$\boxed{2k-6} = 8$ 2k=14 ; k=7

1º Factorizar los siguientes polinomios:

1. x^3-5x^2+8x-4
2. x^3+4x^2+x-6
3. x^3-2x^2-7x-4
4. $x^4-5x^3-13x^2-7x$
5. x^3-x^2-4x+4
6. $4x^3+8x^2-4x-8$
7. x^3-3x^2-6x+8
8. x^3+5x^2+2x-8
9. $5x^3-5x^2-25x-15$
10. $2x^3+16x^2+26x+12$
11. x^3+5x^2+7x+3
12. $3x^3+12x^2+15x+6$
13. x^3+6x^2+9x+4
14. x^3-2x^2-5x+6
15. $3x^3+6x^2-3x-6$
16. x^3+x^2-9x-9
17. $x^3+7x^2+12x+6$
18. x^3-3x^2-9x-5
19. $x^3+3x^2-4x+12$
20. x^3+5x^2-x-5
21. x^3+2x^2-4x-8
22. $x^3+8x^2+5x-14$
23. $x^3-8x^2+19x-12$
24. $x^3+4x^2-11x+6$
25. $2x^3+3x^2-3x-2$
26. $2x^3-18x^2+52x-48$
27. $x^3+3x^2-4x-12$
28. $x^3+9x^2+15x+7$
29. $x^3-2x^2-9x+18$
30. $x^3-9x^2+26x-24$
31. $x^4-3x^3-6x^2+8x$
32. $x^3-x^2-14x+24$
33. $x^5-x^4-8x^3+12x^2$
34. $x^3+x^2-16x+20$
35. $x^3-11x^2+32x-28$
36. $x^6-5x^5-17x^4+21x^3$
37. $x^4-10x^3+25x^2-36$
38. $x^4-5x^3-5x^2+45x-36$
39. $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$
40. $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$
41. $x^4+3x^3-7x^2-27x-18$
42. $x^4-8x^3+23x^2-28x+12$
43. $x^4-8x^3+23x^2-28x+12$
44. $2x^4-10x^3+10x^2+10x-12$

2º Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

1. x^2-2x+1 ; x^3-3x^2+3x-1 ; $4x^2-8x+4$
2. x^2-4x+4 ; x^3-5x^2+8x-4 ; $3x^2-12x+12$
3. x^2-5x+6 ; x^2-9 ; $x^4-5x^3-5x^2+45x-36$
4. x^2-1 ; x^4-5x^2+4 **;** x^4-10x^2+9
5. $2x^2-16x-14$; $2x^3-2x$; $4x^2-4x+4$
6. x^2-5x+4 ; x^3-3x^2-6x+8 ; $2x^3-8x$;
7. x^3-3x+2 ; x^3+2x^2-x-2 ; $2x^3-4x^2-2x$
8. x^3-3x^2+3x-1 ; $2x^2-4x+2$; x^4-3x^2+2x
9. $x^3-6x^2+12x-8$; $2x^2-8x+8$; $x^4-5x^3+8x^2-4$
10. x^3-3x^2+3x-1 ; $3x^2-6x+3$; $x^4-4x^3+5x^2-2x$
11. $2x^3+4x^2-2x-4$; $x^3+6x^2+12x+8$; x^3+4x^2+2x
12. x^3+2x^2-x-2 ; x^3-3x^2-3x-1 ; $x^4+x^3-2x^2$; x^2-2x+1
13. $2x^2-x-3$; $6x^3+7x^2+x$; $2x^3+4x^2-2x-4$; $2x^3+8x^2+6x$
14. $2x^3+4x^2-2x-4$; $x^3+6x^2+12x+8$; x^3+4x^2+2x
15. $2x^4-4x^2$; $2x^3-8x^2+4x$; $4x^3-6x^2+4x$
16. x^3-x ; x^4-5x^2+4 **;** x^4-10x^2+9
17. $x^4-3x^3+3x^2-x$; $2x^3-4x^2+2x$; x^4-3x^2+2x
18. $x^4-6x^3+12x^2-8x$; $2x^3-8x^2+8x$; $^4-5x^3+8x^2-4x$

3.- Hallar mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

1. $(x^5-3x^3+2x^2-15):(x+2)$
2. $(x^3-5x^2+2x-3):(x-1)$
3. $(x^4-3x^3+5x^2-3x+3):(x-3)$
4. $(x^4-2x^3-3x^2-3x+1):(x+3)$
5. $(x^4+2x^3-x^2-2x-2):(x-1)$
6. $(3x^4+2x^2-4x+1):(x-2)$
7. $(x^4-5x^3-x^2+2x-1):(x-3)$
8. $(x^5-2x^3+x^2-1):(x-2)$
9. $(x^3+x^2+3x-1):(x-1)$
10. $(x^4-x^3+4x^2-2x+1):(x-2)$
11. $(x^4-x^3-x^2-x+1):(x+5)$
12. $(2x^4-2x^3+3x^2-x+2):(x-1)$
13. $(x^4+x^3-2x^2-x-1):(x-2)$
14. $(x^5-2x^4+x^3-2x+2):(x-1)$
15. $(x^7+2x^5-3x^4+x+2):(x-3)$
16. $(4x^5+5x^4+6x^3-x^2+2x+2):(x+2)$
17. $(2x^6+3x^5+x^4+x^2+2x+3):(x-1)$
18. $(x^6-x^5+x^4+x^3-x-5):(x-5)$

4.- Aplicar la regla de Ruffini en cada uno de los siguientes casos para calcular el valor de K:

Polinomio	Divisor	Resto	Polinomio	Valor	Resultado
$6x^6+2x^5-x^4+\mathbf{k}x^2+1$	$x-1$	10	$2x^6+3x^5-x^4+\mathbf{k}x^2+1$	$x=2$	5
$2x^7+x^6-x^5+\mathbf{k}x^3-x^2+2x-1$	$x+3$	-50	$2x^7+x^6-x^5+\mathbf{k}x^3-x^2+2x-1$	$x=-4$	35
$3x^6+x^4-2x^3+x^2+\mathbf{k}x$	$x-2$	-2	$3x^6+x^4-2x^3+x^2+\mathbf{k}x$	$x=-2$	2
$7x^5-2x^4+x^3+\mathbf{k}x+5$	$x+1$	30	$7x^5-2x^4+x^3+\mathbf{k}x+5$	$x=2$	-2
$-x^7+x^6+x^4-x^3+\mathbf{k}x^2-x-1$	$x+1$	-5	$-x^7+x^6+x^4-x^3+\mathbf{k}x^2-x-1$	$x=2$	-50
$2x^6-x^5+x^3-x^2+x+\mathbf{k}$	$x-2$	0	$2x^6-x^5+x^3-x^2+x+\mathbf{k}$	$x=-3$	15
$-3x^6-x^5+2x^4-x^3-2x+\mathbf{k}$	$x-4$	2	$-3x^6-x^5+2x^4-x^3-2x+\mathbf{k}$	$x=3$	-6
$x^5+2x^4+3x^3+\mathbf{k}x^2+5$	$x-1$	15	$x^5+2x^4+3x^3+\mathbf{k}x^2+5$	$x=-1$	15
$-2x^6+6x^4+x^3-2x^2+\mathbf{k}$	$x-2$	-29	$2x^6+\mathbf{k}x-1$	$x=-2$	1
$-5x^5+\mathbf{k}x^4-x^3-x+3$	$x+3$	1086	$2x^5-x^4+3x^3-2x^2+\mathbf{k}x-3$	$x=-2$	6
$x^5+2x^4+3x^3+\mathbf{k}x^2+5$	$x-1$	15	$x^5-x^3+\mathbf{k}x+22$	$x=2$	10

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x+3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-1}:\dfrac{x+2}{x+1}$ c) $\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2x}$ d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$

e) $\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}$ f) $\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9}$ g) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}$

h) $\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x+5}$ i) $\dfrac{x^2-4}{x+6}:\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-36}$ j) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right):\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}+\dfrac{3}{x}\right)$

2. Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{x}{x^2-4x+3}-\dfrac{3}{x^2-5x+6}$ b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}$ c) $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

d) $\dfrac{x-3}{x^2+x+1}-\dfrac{3x^2}{x^3-1}$ e) $\dfrac{2}{x^2-2x+1}+\dfrac{x+1}{x^2-1}$ f) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{11}{x^2-11x+30}$

g) $\dfrac{1-x}{x^2-4x+3}-\dfrac{1+2x}{x^2-6x+9}-\dfrac{x+1}{x^2-9}$ h) $\dfrac{1+2x}{x^2+3x+2}-\dfrac{1-x}{x^2+5x+6}-\dfrac{1+x}{x^2+4x+3}$

ECUACIONES DE 1º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Procedimientos

Se trata de encontrar un número real que verifique una igualdad. Para ello las operaciones que se hagan a un lado de la igualdad también se deben realizar al otro lado para que se mantenga la igualdad

Ejemplo1: Resolver 2(x-3) +3(x-5) = 4x-7 ;
1º Operamos los paréntesis ; 2x-6 +3x -15 = 4x -7 ;
2º Se pasan aun lado del signo igual todos los términos con x y al otro los términos sin x y se opera.:
2x+3x-4x = -7+6-15 ; x= -16

Ejemplo 2: Resolver $\dfrac{2x-3}{18}-\dfrac{2-4x}{27}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2x-1}{6}$;

1.- el MCM de los denominadores es 54

$54\left(\dfrac{2x-3}{18}-\dfrac{2-4x}{27}\right)=54\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2x-1}{6}\right)$; 3(2x-3) – 2(2 – 4x) = 18.5 – 9(2x – 1)

6x – 9 –4 + 8x = 90 – 18x + 9

2.- Se pasan aun lado del signo igual todos los términos con x y al otro los términos sin x y se opera.
6x + 8x + 18x = 90 + 9 + 9 + 4; 32x = 112

3.- Se despeja x y se da la solución. $x=\dfrac{112}{32}=\dfrac{7}{2}$

1)	$9-x+\frac{x}{2}=\frac{3x+1}{4}+\frac{4x-5}{6}$	2)	$2x-\frac{x-1}{5}+\frac{4-x}{10}=x+1+\frac{6x-1}{10}$
3)	$2x+\frac{6-x}{3}-\frac{x-3}{6}=x+3+\frac{5-x}{3}+\frac{x+3}{6}$	4)	$\frac{3x+7}{4}+\frac{x-5}{2}-\frac{2x-11}{8}=7+\frac{3x-17}{4}-\frac{x-1}{8}$
5)	$-x+\frac{x+21}{6}-\frac{4-x}{4}=\frac{8x+9}{12}+\frac{x}{2}$	6)	$x+1+\frac{5x-8}{12}-\frac{x-2}{3}=\frac{3x+1}{3}+\frac{x+2}{6}$
7)	$-x+\frac{5+x}{5}-\frac{7+x}{2}=-\frac{x+1}{5}+\frac{9+x}{2}-\frac{6+x}{5}$	8)	$2x-\frac{4-x}{4}+\frac{x}{8}=\frac{16x-1}{8}+\frac{2x-5}{4}$
9)	$x+1+\frac{8-x}{6}-\frac{x+5}{2}=x-1-\frac{x-2}{2}$	10)	$9x-\frac{x}{4}-\frac{4-3x}{8}=6+x+\frac{9x+4}{8}$
11)	$x-8+\frac{x-3}{5}-\frac{x-2}{6}=\frac{1-x}{2}-\frac{2x+1}{10}$	12)	$\frac{10+x}{3}-\frac{3+x}{4}=\frac{1-4x}{4}+\frac{5x+11}{6}$
13)	$\frac{2x-1}{4}-\frac{x+3}{2}=\frac{5x-1}{4}-\frac{3x+1}{2}$	14)	$\frac{12+x}{9}+\frac{x}{12}=\frac{10+x}{9}-\frac{2-x}{36}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Completa	Incompleta falta b	Incompleta falta c
$y=ax^2-bx+c$	$ax^2+c=0$	$x^2+bx=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$x(x+b)=0$ $x=0$ y $x=-b/a$

1º Resuelve las siguientes ecuaciones. Aplicando la fórmula

1) $\mathbf{x^2-5x+6=0}$ **.-**	2) $\mathbf{x^2-10x+9=0}$	3) $\mathbf{x^2-8x+15=0}$
4) $x^2+12x+32=0$	**5)** $x^2-9x+8=0$	**6)** $x^2-2x-15=0$
7) $x^2-x-2=0$	**8)** $x^2-3x-10=0$	**9)** $x^2-3x-10=0$
10) $x^2-7x+6=0$	**11)** $x^2-7x+12=0$	**12)** $x^2-4x-12=0$
13) $x^2-6x+5=0$	**14)** $x^2-3x-4=0$	**15)** $x^2+x-2=0$
16) $x^2-9x+20=0$	**17)** $x^2-5x+4=0$	**18)** $x^2-2x-3=0$
19) $x^2+7x+12=0$	**20)** $x^2-4x+3=0$	**21)** $x^2-5x-6=0$
22) $x^2-11x+24=0$	**23)** $x^2-3x+2=0$	**24)** $x^2-6x+8=0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

1) $\mathbf{2x^2-x=0}$	2) $\mathbf{2x^2-3x=0}$	3) $\mathbf{x^2+x=0}$	4) $\mathbf{x^2-5x=0}$	5) $\mathbf{x^2+9x=0}$
6) $2x^2-5x=0$	**7)** $x^2-6x=0$.-	**8)** $x^2+2x=0$.-	**9)** $x^2+8x=0$	**10)** $x^2-2x=0$
11) $2x^2-7x=0$	**12)** $3x^2-x=0$	**13)** $4x^2+7x=0$	**14)** $x^2+7x=0$	**15)** $x^2-x=0$
16) $x^2+3x=0$	**17)** $3x^2+5x=0$	**18)** $x^2-3x=0$	**19)** $5x^2-x=0$	**20)** $5x^2-4x=0$
21) $3x^2-2x=0$	**22)** $x^2-4x=0$	**23)** $5x^2-2x=0$	**24)** $3x^2-4x=0$	**25)** $x^2-7x=0$
26) $x^2-1=0$	**27)** $4x^2-1=0$	**28)** $9x^2-1=0$	**29)** $16x^2-25=0$	**30)** $9x^2-16=0$
31) $x^2-4=0$.	**32)** $16x^2-1=0$	**33)** $x^2-9=0$	**34)** $4x^2-9=0$	**35)** $4x^2-49=0$
36) $16x^2-49=0$	**37)** $25x^2-16=0$	**38)** $16x^2-9=0$	**39)** $49x^2-1=0$	**40)** $25x^2-1=0$

3.- Operar y realizar las siguientes ecuaciones de segundo grado

1º) $4x^2-32x=0$

2º) $3(x^2-2)=21$

3º) $2x^2-1=1-x-x^2$

4º) $\frac{x}{5}\left(x+\frac{1}{6}\right)=x-1$

5º) $5x^2=0$

6º) $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$

7º) $(x+1)^2=4$

8º) $(x+4)(x-3)=-12$

9º) $(1-2x)^2=1$

10º) $(2x-1)(x+3)=0$

11º) $\frac{x}{x+2}=x-1$

12º) $(x+1)^2+(x-1)^2=1$

13º) $3x(3x-2)=1$

14º) $(2x-3)^2=8x$

15º) $\frac{x-1}{x}=x+1$

16º) $5x(x+4)=0$
17º) $3(x-5)^2-75=0$
18º) $(4x-1)(2x+2)=12$
17º) $11(x-1)^2=(2x-3)^2+4x^2+1$
19º) $(3x-\frac{1}{2})(3x+\frac{1}{2})-2x=8x^2-1$
20º) $(x+1)(x-1)(x+2)=x^3-x^2+8$
21º) $x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3}$
22º) $x-\frac{4x+3}{8}+\frac{x^2+2}{16}=1$
23º) $\frac{x+8}{x-8}-2=\frac{24}{x-4}$

24º) $\frac{1}{x}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x+1}$
25º) $\frac{x-2}{5}=\frac{2}{x+1}$
26º) $\frac{6}{4x^2+x-3}=\frac{1}{x^2+x-1}$
27º) $\frac{x+x^2}{8}-\frac{1-x^2}{4}=\frac{x+1}{2}-1$
28º) $\frac{3x}{2}-\frac{x^2+4}{4}=1$

29º) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+2}=\frac{9}{2}$

7º BICUADRADAS Y DE ORDEN SUPERIOR

Procedimiento:
Se hace el cambio de variable $x^2=y$; $x^4=y^2$, y se resuelven como las ecuaciones de 2º grado. Al terminar se deshace el cambio de variable.

Ejemplo: $x^4-6x^2+5=0$; $x^2=y$; $y^2-6y+5=0$;

$$y=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} y=5; & x^2=5; x=\pm\sqrt{5} \\ y=1; & x^2=1; x=\pm 1 \end{cases}$$

Ecuaciones de grado superior
Procedimiento:
Se obtienen soluciones por el método de Ruffini hasta obtener una ecuación de segundo grado que se resuelve utilizando la fórmula.

Ejemplo: $8x^4-6x^3-7x^2+6x-1=0$

	8	-6	-7	6	-1
1		8	2	-5	1
	8	2	-5	1	0
-1		-8	6	-1	
	8	-6	1	0	

$8x^2-6x+1=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}=\frac{6\pm 2}{16}=\begin{cases}\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\\ \frac{4}{16}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Soluciones:1, -1, 1/2, 1/4

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

1. $x^4-5x^2+4=0$
2. $x^4-8x^2-9=0$
3. $x^4-25x^2+144=0$
4. $36x^4-13x^2+1=0$
5. $x^4+4x^2+3=0$
6. $x^4-13x^2+36=0$
7. $x^4-26x^2+25=0$
8. $4x^4-17x^2+4=0$
9. $9x^4+5x^2-4=0$
10. $144x^4-25x^2+1=0$
11. $(3x^2+3)(x^2-5)=-15$
12. $(x^2-5)(x^2-3)=-1$
13. $x^4-29x^2+100=0$
14. $9x^4+16=40x^2$
15. $34-x^2=\frac{225}{x^2}$
16. $\frac{x^2-32}{4}+\frac{28}{x^2-9}=0$
17. $\frac{2}{x^2-9}-\frac{x^2-16}{72}=0$
18. $x^4-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}=0$

Resolver las siguientes ecuaciones de grado superior:

1 $6x^3+5x^2-2x-1=0$ 2. $2x^3-x^2-8x+4=0$

3. $6x^3- 17x^2+11x-2=0$
4. $3x^3+x^2-12x-4=0$
5. $2x^4-9x^3+6x^2+11x-6=0$
6. $3x^4+5x^3-10x^2-20x-8=0$
7. $3x^4+7x^3+x^2-7x-4=0$
8. $2x^3-3x^2-2x+3=0$
9. $12x^4-x^3-49x^2+4x+4=0$
10. $4x^4-20x^3+15x^2+45x-54=0$
11. $6x^4+17x^3-8x^2-27x+18=0$
12. $9x^4-36x^3+26x^2+4x-3=0$
13. $9x^4-36x^3+26x^2+4x-3=0$
14. $5x^3-x^2-5x+1=0$
15. $x^6-19x^3=216$
16. $x^8-x^4-240=0$

17 $\dfrac{x^4-4x}{2}=x^2-x^3$

18 $\dfrac{x^4-4}{4}+\dfrac{x^2+2}{2}-2x^2=\dfrac{\frac{x^2}{2}-3}{3}$

19. $2x^3+\dfrac{2x^2+x}{3}-\dfrac{x^2-x}{6}=3x^4$

20. $2x^3+\dfrac{x^2+x^3}{2}=3x^2+\dfrac{x^2-x^3}{3}$

21. $\left(x^2-4\right)^2-5\cdot\left(x^2-4\right)+4=0$

22. $\dfrac{x^4-4}{4}+\dfrac{x^2+2}{2}=2x^2-\dfrac{x^2+2}{3}$

23 $\dfrac{x^4-4}{4}+\dfrac{x^2+2}{2}=2x^2-\dfrac{x^2+2}{3}$

24 $2x+\dfrac{x^3+\frac{x}{2}}{3}+\dfrac{x^3-x}{2}=x^3$

25. $2x^3+\dfrac{2x^2+x}{3}-\dfrac{x^2-x}{6}=3x^4$

26. $2\left(x^2-\dfrac{x^4}{2}-x\right)+x^2=\dfrac{x^3-x^5}{2}-x+x^2$

8º ECUACIONES RACIONALES

Ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador de una fracción. Normalmente Se resuelven reduciéndolas a común denominador mediante el mínimo común múltiplo, o bien en el caso de que exista una única fracción en cada miembro de la igualdad se podría multiplicar en cruz

1. $\dfrac{x^2(2x-5)}{x+1}=\dfrac{9(1-x)}{2x+5}$

2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{3}{10}$

3. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$

4. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{4}$

5. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$

6. $\dfrac{3x-1}{x+2}-1=\dfrac{x}{2x+4}$

7. $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$

8. $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$

9. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-2}=1$

10. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x^2+3}{x}=x^3$

11. $\dfrac{4x+7}{19}-\dfrac{x-5}{x+3}=\dfrac{4x}{9}$

12. $\dfrac{5}{4x^2}-\dfrac{3}{6x^2}=\dfrac{1}{3}$

13. $\dfrac{\frac{1}{3}}{x}=\dfrac{1-x}{x+\frac{1}{3}}$

14. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{3+x}{x-1}=2$

15.

16. $$\frac{(x-1)(x-2)}{1+\dfrac{x-2}{1-\dfrac{x-3}{x}}}=3$$

17. $$\frac{x^2-32}{4}+\frac{28}{x^2-9}=0$$

18. $$\left(\frac{20x}{3}-1\right)\cdot x-\frac{19}{3}\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{5}\right)=0$$

19. $$\left(x+1+\frac{6}{x}\right)\cdot\left(x-1+\frac{6}{x}\right)=24$$

20. $$\frac{x}{1-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}}=\frac{1}{12}$$

21. $$\frac{x}{x-3}-\frac{x+1}{x-1}=1$$

22. $$\frac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{2-\dfrac{x-1}{x+1}}=2$$

$$\frac{\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-3}{4}}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x+1}}}=-\frac{1}{x}$$

23. $$\frac{x+6}{x-2}-\frac{3x}{x^2-4x+4}=2$$

24. $$\frac{x+4}{3}-\frac{7-x}{x-3}=\frac{4x+7}{9}-1$$

25. $$\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{6}{x^2+2x+1}=\frac{5}{x^2-1}$$

26. $$1-\frac{x-4}{x-3}=\frac{6}{x^2-x-6}$$

27. $$2x^2-\frac{6x}{11}-\frac{3x}{4}=\frac{22x^2}{3}-\frac{9}{44}-\frac{11x}{4}$$

28. $$\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x^2-6x+4}{x^2+3x+2}=-1$$

29. $$\frac{x^2-x-2}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{15}{x^2+x}$$

30. $$\frac{2x-3}{x^2-4}+\frac{3x+1}{x+2}=\frac{13}{5(x-2)}$$

ECUACIONES CON RAICES

Procedimiento: **Si la ecuación tiene una raíz se deja en un lado de la igualdad y se eleva al cuadrado, para quitar la raíz.**

Ejemplo: $3\sqrt{9+x}-15=2x+1$

1) Se deja la raíz sola a un lado del signo =. $3\sqrt{9+x}=2x+16$

2) Se elevan los dos términos de la igualdad al cuadrado. $\left(3\sqrt{9+x}\right)^2=(2x+16)^2$

$9(9+x)=4x^2+216+64x$

Se termina resolviendo como una ecuación normal. $81+9x=4x^2+216+64x$

$4x^2+55x-135=0$;

Procedimiento: Si la ecuación tiene dos raíces se deja una de ellas en un lado de la igualdad y se eleva al cuadrado, para quitar la raíz. Después se vuelve a proceder igual.

Ejemplo: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

1) Se deja una raíz a cada lado del signo =. $\sqrt{2x-1}=6-\sqrt{x+4}$

2) Se elevan los dos términos al cuadrado. $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(6-\sqrt{x+4}\right)^2$

$2x-1=36+(x+4)-12\sqrt{x+4}$

3) Se deja la raíz que queda sola un lado de la igualdad.

$2x-1-36-(x+4)=-12\sqrt{x+4}$; $x-41=-12\sqrt{x+4}$

4) Se vuelve a elevar al cuadrado. $(x-41)^2=\left(-12\sqrt{x+4}\right)^2$

$$x^2+1681-82x=144(x+4)$$

Se termina resolviendo como una ecuación normal. $x^2+1681-82x-144x-576=0$;
$x^2 + 226x + 1105 = 0$ (resolver)

Resolver las siguientes ecuaciones radicales:

1. $\sqrt{x-2}=2$
2. $\sqrt{1-x}=1$
3. $\sqrt{3-2x}=3$
4. $\sqrt{x^2-1}=x-1$
5. $\sqrt{x^2-7}=x-5$
6. $x+\sqrt{2x^2+16}=4$
7. $2x+1+\sqrt{x^2-x+3}=0$
8. $x=2+\sqrt{x}$
9. $-3+\sqrt{x}=9-x$
10. $2+2(x-1)=5\sqrt{x-1}$
11. $x-\sqrt{25-x^2}=1$
12. $2x+1+\sqrt{x^2-x+3}=0$
13. $\sqrt{9-x}-11=x$
14. $\sqrt{x-1}-x+7=0$
15. $2+\sqrt{x-5}=13-x$
16. $\sqrt{(2-x)(1-x)}=x-1$
17. $\sqrt{27+x}-5=\dfrac{x-7}{2}$

18. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+4}=1$
19. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=1$
20. $6\sqrt{x}=x\sqrt{x-5}$
21. $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$
22. $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$
23. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3$
24. $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$
25. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=2$
26. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-14}=1$
27. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1$
28. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$
29. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$
30. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$
31. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}=1$
32. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$
33. $\dfrac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$

34. $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}}=1$
35. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=1$
36. $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$
37. $2\sqrt{x-3}+\sqrt{4x-1}=1$
38. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$
39. $\sqrt{x-9}-\sqrt{x}-18=1$
40. $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$
41. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$
42. $\sqrt{2x-1}=6-\sqrt{x+4}$
43. $5-\sqrt{x}=\sqrt{1+2x}$
44. $\sqrt{9-x}-\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$
45. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$
46. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{3+x}=1$

10º SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

1º) $x+y=20$ $xy=64$	2º) $x-y=21$ $xy=100$	3º) $x+y=5$ $x^2-xy=-3$	4º) $x^2+y^2+x-5y=24$ $X+y=7$
5º) $x^2-y^2=9$ $xy=20$	6º) $x^2+y^2=25$ $x+y=7$	7º) $x^2-y^2=59$ $x^2+y^2=149$	8º) $x+2/y=1$ $1+1/x=6$
9º) $y^2=x^2-5$ $3y-x=3$	10º) $x+y=7$ $x.y=12$	11º) $x=2y$ $x^2+y^2=20$	12º) $x+y=13$ $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$
13º) $y^2+xy=5$ $x^2+xy=20$	14º) $x^2+y^2=8$ $x-y=0$	15º) $xy=12$ $x-y=1$	16º) $x^2-2y^2+2y-1=0$ $x-y=1$
17º) $x-y=1$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$	18º) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=15$ $x-y=105$	19º) $xy=165$ $x^2-y^2=104$	20º) $xy=182$ $x+y=27$
21º) $x+y=16$ $x^2-y^2=32$	22º) $2x+y=3$ $x^2+y^2=2$	23º) $x-y=1$ $\sqrt{x}-\sqrt{y}=5$	24º) $x-y=10+\sqrt{xy}$ $xy=36$
25º) $xy=6$ $1/x+1/y=5/6$	26º) $x^2-2y^2=7$ $3x^2-5y^2=30$	7º) $xy=6$ $x^2-y^2=5$	28º) $xy=28$ $x^2+y^2=65$
29º) $xy=12$ $2x^2-3y^2=5$	30º) $x^2+3xy=0$ $2x-y=-1$	31º) $x^2+y^2=17$ $(x-y)^2=9$	32º) $x+y=26$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=18$
3º) $(x-y)^2=1$ $x^2-y^2=4$	34º) $2x+y^2=5$ $5x=9+y$	35º) $x^2+y^2+3x+y=20$ $x-y=2$	36º) $xy=24$ $x^2-y^2=55$

37º) $6x+y=2$ $x^2-y=0$	8º) $x^2/25 + y^2/9=1$ $x+2y=4$	39º) $xy = 6$ $6x+y=9$	40º) $2x-y=4$ $x^2+y^2=13$

13º INECUACIONES

Grado 1: **Se trabaja como en una ecuación normal, salvo que si tenemos un número negativo multiplicando a la variable y lo pasamos al otro lado de la desigualdad dividiendo (o viceversa), la desigualdad cambia de sentido. Se da como solución a la inecuación el intervalo de la recta real (-∞, a) o (a, ∞), según corresponda.**

Ejemplo: $\frac{2x}{3}-5\frac{1-x}{4}<10x+2+\frac{5x-3}{6}$; se calcula el MCM para quitar los denominadores

MCM = 12; $4(2x) – 15(1 - x) < 120x + 24 + 2(5x – 3)$; $8x – 15 + 15x < 120x + 24 +10x – 6$;

$23x – 15 < 130x + 18$; $- 107x < 33$; $x > \frac{-33}{107}$; *Solución:* $\left(\frac{-33}{107},\infty\right)$

Grado 2 o mayor que 2: Se buscan las raíces de la ecuación y se hace una tabla de signos para la ecuación. Se dan como solución los intervalos que correspondan al signo de la inecuación.

Ejemplo: $x^4 – 2x^2 + x > 0$, (se nos piden los valores de x tales que al sustituirlos en el polinomio nos den valores mayores de 0 , es decir, valores positivos).
Calculamos las raíces de esta ecuación, para ello sacamos x factor común y al polinomio resultante le hacemos Ruffini por ser un polinomio de grado 3. $x(x^3 – 2x +1) = x(x – 1)^2(x + 2)$, de donde se deduce que las raíces que hemos obtenido son x = 0; x = 1; x = -2.
Tabla de signos del polinomio:

+	-2	-	0	+	1	+

Los signos de la tabla se han obtenido sustituyendo la x por –3, -1, 0,5 y 2 en el polinomio.
Solución: (-∞, -2) U (0, 1) U (1, ∞)

Inecuaciones racionales: Se procede como en el apartado anterior haciendo una tabla de signos con los valores que anulan el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{2x-3}{x+2}\geq 0$, ⇒ Haciendo una tabla de signos tenemos:

$2x – 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$ + – + *Solución = (-∞, -2)∪[3/2. ∞)* x
$+ 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ -2 3/2

1.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{3x-11}{20}-\frac{5x+1}{14}<\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$

2. $\frac{5-x}{2}-\frac{x+3}{6}>\frac{9-x}{4}-\frac{6x-2}{16}$

3. $(2x-1)-\frac{3x-1}{3}-\frac{5}{3}\leq\frac{x+2}{6}+x-3$

4. $\frac{4-3x}{5}-\frac{x+3}{10}\geq\frac{23-x}{15}-\frac{11+13x}{20}$

5. $2(3x-1)-3x \leq 6x+4$

6. $3(3x-1)-3x \leq 9x+3$

7. $-x+\frac{4+x}{9}<\frac{11-x}{9}-\frac{1+x}{9}$

8. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$

9. $10x+2 –5(x-3)>4(x+3)+1$

10. $x^2-5x+4<0$

11. $x^2-3x-4\geq 0$

12. $4x^3-x^5<0$

13. $x^2-x-6\leq 0$

14. $5x(x+4)\leq 0$

15. $x^2-4x+3<0$

16. $x^2-6x+8\le 0$

17. $(2x-1)(x+3)>0$

18. $\frac{x}{x+2}\le x-1$

19. $\frac{x+2}{x+4}\le 0$

20. $\frac{x\ \ -1}{x+4}\le 0$

21. $\frac{x^2-1}{x+3}\le 0$

22. $\frac{x^2-16}{x-3}\le 0$

23. $\frac{x^2-1}{x-1}>0$

24. $\frac{x^2-4}{x+2}\le 0$

25. $\frac{x^2-9}{x+5}\le 0$

Ejercicios de inecuaciones

1. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $5-x\le 12$ b) $\frac{x-3}{2}-\frac{2-x}{3}>3$ c) $\frac{5}{6}(3-x)-\frac{1}{2}(x-4)\ge\frac{1}{3}(2x-3)-x$

d) $7(3-x)\ge 5$ e) $\frac{3-\frac{1}{3}x}{3+\frac{1}{2}}\ge\frac{3x-\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}}$ f) $\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{3}\le\frac{2}{15}(3x+2)+\frac{4(1-x)}{3}$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2+5x\le 0$ b) $3(x-5)^2-12\ge 0$ c) $\frac{x^2-9}{5}-\frac{x^2-4}{15}\le\frac{1-2x}{3}$

d) $x^2-9x+14<0$ e) $(x+1)^2-(x-1)^2+12\ge 0$ f) $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{x^2-9}{4}\le\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $x^4+4<0$ b) $x^4-3x^2-4\le 0$ c) $x^3-x^2-25x+25>0$

d) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12<0$ e) $x^4+3x^3-7x^2+x+2\le 0$ f) $x^4-4x^3+7x^2-12x+12\ge 0$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{1}{x+2}\le 0$ b) $\frac{x^2-9}{x-1}\le 0$ c) $\frac{x}{x+3}+1<0$ d) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+6}<3$

e) $\frac{x^2-1}{x^2}\ge 0$ f) $\frac{x}{x-3}\ge 0$ g) $\frac{x^2-3x+2}{4-x^2}\le 0$ h) $\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}>\frac{x}{x^2-3x+2}$

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}x\le 2\\ x\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-3\le 6-x\\ 4-2x>6\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-1\ge 7-x\\ 1-x\le 1-2x\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{x}{2}+1>2\\ 5+x\ge 2x\end{cases}$

e) $\begin{cases}x^2+3\le 7\\ x-1\ge 0\end{cases}$ f) $\begin{cases}\frac{x-2}{3}-\frac{3x-1}{5}\le\frac{17}{15}\\ 8-3x\ge 2-x\end{cases}$ g) $\begin{cases}2x^2-3\le 6x+5\\ 7x+1\le 13+4x\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-7x+6\le 0\\ -x^2+8x>7\end{cases}$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

a) $x+y>3$ b) $3x-y\le 2$ c) $x+1\ge y$ d) $x+\frac{y}{2}>4$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

a) $\begin{cases}y<-2x+4\\ y\ge x\end{cases}$ b) $\begin{cases}6x-5y\le 30\\ 4x+3y\le 0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-y\ge 0\\ y-2\le 0\\ 2x+y\le 10\\ y\ge 0\end{cases}$ d) $\begin{cases}y\le 2\\ x+y\le 3\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

Soluciones

1. a) $[-7, +\infty)$; b) $(31/5, +\infty)$; c) $(-\infty, 11/2]$; d) $(-\infty, 16/7]$; e) $(-\infty, 351/382]$; f) $(-\infty, 1]$

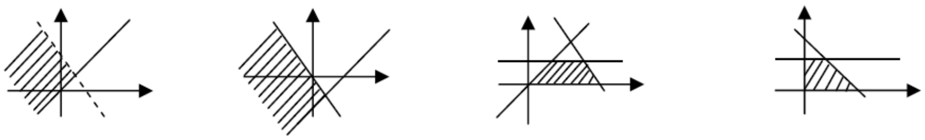
2. a) $[-5, 0]$; b) $(-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$; c) $[-7, 2]$; d) $(2, 7)$; e) $[-3, +\infty)$; f) $(-\infty, -2{,}9278\ldots] \cup [-1{,}072\ldots, +\infty)$

3. a) ϕ ; b) $[-2, 2]$; c) $(-5, 1) \cup (5, +\infty)$; d) $(-3, -2) \cup (1, 2)$; e) $\{1\} \cup [-4{,}56\ldots, -0{,}438\ldots]$; f) R (raíz 2 doble)

4. a) $(-\infty, -2)$; b) $(-\infty, -3] \cup (1, 3]$; c) $(-3, -3/2)$; d) R ; e) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; f) $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$
g) $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$; h) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

5. a) $[0, 2]$; **b)** $(-\infty, -1)$; c) ϕ ; d) $(2, 5]$; e) $[1, 2]$; f) $[-6, 3]$; g) $[-1, 4]$; h) $(1, 6]$

7.



LOGARITMOS

Definición: Sea a un número real no nulo distinto de 1, y A otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo del número real A en la base a, el exponente x a que debe elevarse la base a para obtener dicho número

$$\log_a A = x \leftrightarrow a^x = A$$

Ejemplo:

$\mathrm{Log}_3 \sqrt[3]{81} = x$ $\quad$ $81 = 3^4$ (Se factoriza)

$3^x = 3^{4/3}$

$x = 4/3$

Propiedades de los logaritmos:

1ª logaritmo de un producto:
$\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B$

2ª logaritmo de un ccociente:
$\log_a (A/B) = \log_a A - \log_a B$

3ª logaritmo de una potencia:
$\log_a (A^n) = n \log_a A$

4ª logaritmo de una raiz:
$\log_a (\sqrt[n]{A}) = 1 / n \log_a A$

Ejemplo:

Si log 2 =0.301030… Calcular :

1º $\log \sqrt[3]{2}$

$\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \log 2 = \frac{1}{3}.0.301030 .. = 0{,}1003433$

2º log 2000

log 2000 = log (2 . 1000) = log2 + log 1000=
$\log 2 + \log 10^3 = 0{,}301030\ldots + 3 = 3{,}301030\ldots$

Ecuaciones logarítmicas: Es aquella donde la incógnita aparece sometida a la operación logaritmo

Resolver: $2 \log x + \log 40 = 3$

1º Los números multiplicando a los logaritmos pasan elevando (propiedad 3)

$$\log x^2 + \log 40 = 3$$

2º Si algún numero no es un logaritmo se trasforma, como la base es decimal 3=log 1000

$$\log x^2 + \log 40 = \log 1000$$

3º Agrupamos las sumas en multiplicaciones y las restas en divisiones (Propiedades 1 y 2)

$$\log(x^2 40) = \log 1000$$

4º Igualamos $40x^2 = 1000$; $x^2 = \frac{1000}{40}$; $x^2 = 25$; $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

La solución x=-5 no vale pues al comprobar sustituyendo quedaría 2log(-5) + log 40 =3 y los logaritmos de cero o de números negativos no existen

Definición

El logaritmo en base a de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número.

$\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ a = base N = número x = solución $\Leftrightarrow$ Si y sólo si

Ejemplos

a) $\log_3 81 = x$ $\qquad \log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

b) $\log_2 128 = x$ $\qquad \log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \rightarrow 2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$

c) $\log_3 \sqrt{243} = x$ $\qquad \log_3 \sqrt{243} = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^x = \left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \rightarrow x = \frac{5}{2}$

EJEMPLOS

a) $\log_2 64 = x$ $\qquad \log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow x = 6$

b) $\log_2 \sqrt{8} = x$ $\qquad \log_2 \sqrt{8} = x \Leftrightarrow 2^x = 8^{1/2} \rightarrow 2^x = 2^{3/2} \rightarrow x = 3/2$

c) $\log_{1/2} 4 = x$ $\qquad \log_{1/2} 4 = x \Leftrightarrow (1/2)^x = 4 \rightarrow 2^{-x} = 2^2 \rightarrow x = -2$

d) $\log_x 125 = 3$ $\qquad \log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \rightarrow x^3 = 5^3 \rightarrow x = 5$

e) $\log_3 x = 3$ $\qquad \log_3 x = 3 \Leftrightarrow 3^3 = x \rightarrow x = 27$

1.- Aplicando la definición de logaritmo resolver los siguientes ejercicios:

1. $\log_2 64 = x$
2. $\log_5 125 = x$
3. $\log_3 1/27 = x$
4. $\log_{1/5} 25 = x$
5. $\log_2 \sqrt{32} = x$
6. $\log_{125} 1/5 = x$
7. $\log_7 \sqrt[3]{49} = x$
8. $\log_{343} \sqrt{7} = x$
9. $\log_{1/5} \sqrt[3]{625} = x$
10. $\log_3 81 = x$
11. $\log_{200} x = 1$
12. $\log_{128} \sqrt{2} = x$
13. $\log_{\sqrt{5}} 125 = x$
14. $\log_x \sqrt{125} = 3/2$
15. $\log_x \sqrt[4]{8} = 3/4$
16. $\log_x 125 = 3/2$
17. $\log_{2/3} 81/16 = x$
18. $\log_{1/3} 81 = x$
19. $\log_{101} 10201 = x$
20. $\log_x 1/3 = -1/2$
21. $\log_{5/3} 27/125 = x$
22. $\log_{16} 0{,}5 = x$
23. $\log_{125} 1/\sqrt{5} = x$
24. $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$
25. $\log_{10} 0{,}00001 = x$
26. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{128} = x$
27. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{343} = x$
28. $\log_{1/3} \sqrt[5]{81} = x$
29. $\log_{16} \sqrt[3]{2} = x$
30. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32} = x$
31. $\log_{125} \sqrt{5} = x$
32. $\log_{1/5} \sqrt[4]{5} = x$
33. $\log_{216} \sqrt[3]{6}$
34. $\log_{\sqrt{27}} 3 = x$
35. $\log_{50} x = 1/2$
36. $\log_{200} x = 50$
37. $\log_a 256 = 8$
38. $\log_a 0{,}125 = 3$
39. $\log_a \frac{1}{9} = 2$
40. $\log_a 0.001 = -3$
41. $\log_2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{8}}} = x$
42. $\log_x \sqrt{\frac{1}{125}} = -3/2$

2.- Si $\log_3 A$ es x expresar en función de x los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 27A$
b) $\log_3 A/81$
c) $\log_3 \sqrt{A}$
d) $\log_3 A^2$
e) $\log_3 A^3 .81$
f) $\log_3 \sqrt[4]{A}$
g) $\log_3 (81\sqrt{A})$
h) $\log_3 \frac{27}{A^4}$
i) $\log_3 \sqrt[4]{\frac{3}{A}}$

j) $\log_3 \dfrac{9.A}{\sqrt{27}}$ | **k)** $\log_3 \sqrt{3.A}$

EJEMPLOS RESUELTOS:

① Sabiendo que $log_{10}\ 2 = 0{,}301030$ y $log_{10}\ 3 = 0{,}477121$, calcular $log_{10}\ 6$, $log_{10}\ 8$, $log_{10}\ \dfrac{3}{2}$, $log_{10}\ \sqrt[3]{3{,}6}$.

Resolución:

Para obtener los logaritmos pedidos a partir del logaritmo de 2 y de 3, hay que expresar los números 6; 8; $\dfrac{3}{2}$ y 3,6 en función de 2 y 3.

- $log_{10}\ 6 = log_{10}\ (2\cdot 3) = log_{10}\ 2 + log_{10}\ 3 = 0{,}301030 + 0{,}477121 = 0{,}778151$

- $log_{10}\ 8 = log_{10}\ 2^3 = 3\ log_{10}\ 2 = 3 \cdot 0{,}301030 = 0{,}903090$

- $log_{10}\ \dfrac{3}{2} = log_{10}\ 3 - log_{10}\ 2 = 0{,}477121 - 0{,}301030 = 0{,}176091$

- $log_{10}\ \sqrt[3]{3{,}6} = \dfrac{1}{3} log_{10}\ \dfrac{36}{10} = \dfrac{1}{3} log_{10}\ \dfrac{2^2\cdot 3^2}{10} =$

$$= \frac{1}{3}(2\ log_{10}\ 2 + 2\ log_{10}\ 3 - log_{10}\ 10) =$$

$$= \frac{1}{3}(2\cdot 0{,}301030 + 2\cdot 0{,}477121 - 1) = 0{,}185434$$

3.- Sabiendo que log2=0,3010 y que log3=0,477 calcular

1. log 6
2. log $\sqrt{2}$
3. log $\sqrt{6}$
4. log (1/6)
5. log(1/ $\sqrt{12}$)
6. log 800
7. log 5
8. log 45
9. log $\sqrt[3]{1600}$
10. log 90
11. log (1/ 12)
12. log (6000)
13. log $\sqrt{0{,}0012}$
14. log $\sqrt{0{,}006}$
15. log $\sqrt[3]{800}$
16. log 1/ 2000
17. log $\sqrt[3]{9}$
18. log $\dfrac{600}{0{,}9}$
19. log(0,004 . 90)
20. log($\sqrt{25000}$)
21. log $\dfrac{0{,}004}{27}$
22. log (8. $\dfrac{0{,}2}{30}$)
23. log (0,0015 . 3000)
24. log(12. $\sqrt{2}$)
25. log($\sqrt[3]{900}$)
26. log($\dfrac{500000}{9}$)

Ejercicio: resolución de ecuaciones logarítmicas

① Resolver la ecuación $2\ log\ x = 1 + log\ (x - 0{,}9)$.

Resolución:

$log\ x^2 = log\ 10 + log\ (\ x - 0'\ 9)$

$log\ x^2 = log\ [10\ (x - 0'\ 9)] \Rightarrow x^2 = 10\ (x - 0'\ 9)$

$x^2 = 10x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{matrix} \to 9 \\ \to 1 \end{matrix}$$

Hay dos soluciones: $x = 9$ y $x = 1$

② Resolver la ecuación $3 \log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$

Resolución:

$$\log x^3 - \log 32 = \log \frac{x}{2}$$

$$\log \frac{x^3}{32} = \log \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{32} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^3 - 16x = 0$$

x no puede ser cero pues no existe $\log 0$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4.$

La solución $x = -4$ no es válida

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

---

1. $\ln(2x-3)+\ln(5-x)=\ln 5$
2. $2 \log x - \log 4 = \log 9$
3. $4\log x - \log 100 = 2$
4. $\log x - \log 2 = 1$
5. $\log x - \log 4 = 2$
6. $\ln(5-x)-\ln(4-x)=\ln 2$
7. $\log(2x^2)-\log x = 1$
8. $\ln x = \ln 2 + 2\ln(x-3)$
9. $2\log(2x) - \log x = 1$
10. $2\ln x - \ln(5x) = \ln 2$
11. $\ln(65-x^3) = 3\ln(5-x)$
12. $2\log x - \log(x+11/10) = 1$
13. $5\ln x = 3\ln x + 2\ln 6$
14. $4\log(2x) - 3\log x = 1$
15. $5\log(x) - \log(288) = 3\log(x/2)$
16. $2\log x + \log(x^2+15) = \log(16)$
17. $\log(x-2)+\log(x-1)=1$
18. $2\log_2 x + \log_2(x^2+2) = \log_2 3$
19. $\log(35-x^3) = 3\log(5-x)$
20. $\log(7x-9) + \log(3x-4) = 1$
21. $2\log x - \log(x-16) = 2$
22. $\log x = 1 + \log(22-x)$
23. $\log(3x-1) - \log(2x+3) = 1 - \log 25$
24. $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$
25. $\log(5x+4) - \log 2 = 1/2 \log(x+4)$
26. $(x^2 - x - 3)\log 4 = 3\log 1/4$
27. $(x^2 - 4x + 7)\log 5 + \log 16 = 4$
28. $(x^2-5x+9)\log 2 + \log 125 = 3$
29. $\log(16-x^2) = \log(3x-4)$
30. $\log x + \log 50 = 3$
31. $2\log x = \log(10x+11)$
32. $\log\sqrt{x} - \log\sqrt{2} = 1/2$
33. $\log\sqrt{7x+3} + \log\sqrt{4x+5} = 1/2 + \log 3$
34. $\log x = 2+1/2(\log(18)+\log(8)-2\log(25))$
35. $\log\sqrt[3]{x} - \log\sqrt[3]{4} = 1/3$
36. $\log\sqrt[4]{x^3} - \log\sqrt{10} = 1/4$

5.-Resuelve los siguientes sistemas de logaritmos:

1º $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ 2º $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ 2\log x - \log y = 3 \end{cases}$ 3º $\begin{cases} x - 3y^2 = 5 \\ \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$ 4º $\begin{cases} x + y = 110 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

5º $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ 6º $\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ 7º $\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ 8º $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{l} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \log xy^3 = \log 10^5 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} xy^3 = 10^5 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10y$$

$10y^4 = 10^5 \Rightarrow y^4 = 10^4 \Rightarrow y = 10$

Como $x = 10y \Rightarrow x = 10 \cdot 10 = 100$

El resultado y = -10 no tiene sentido.)

15º EXPONENCIALES

Ecuaciones Exponenciales: **Son aquellas en las que la incógnita se encuentra en el exponente.**
y se cumple: $a^x = a^y \leftrightarrow x=y$

Ecuaciones exponenciales directas se debe buscar a ambos lados de la igualdad la misma base entonces se igualan exponentes:	**Ejemplo:** $4^{2x-1}=8$ $(2^2)^{2x-1}=2^3$ $2^{4x-2}=2^3$ $4x-2=3 \rightarrow 4x=6$; $x=6/4=3/2$
Ecuaciones exponenciales de cambio de variable. Se debe operar de tal forma ,aplicando las propiedades de las potencias, que podamos realizar un cambio de variable	**Ejemplo:** $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$ Aplicamos las Propiedades de las potencias $\begin{cases} (2^2)^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \\ 2^{2x}\,2^2+2^x\,2^3-320=0 \end{cases}$ Realizamos El cambio $2^x=y$: $4y^2+8y-320=0$ si resolvemos la ecuación las soluciones son: $y=8$ e $y=-10$ si sustituimos Para deshacer el cambio $y=8 \longrightarrow 2^x=8$ $x=3$ $y=-10 \longrightarrow$ no es potencia de 2 luego la solución no es válida

EJEMPLOS

Ejercicio: resolución de ecuaciones exponenciales

① Resolver $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$

Resolución:

•Expresando $\frac{1}{8}$ como potencia de 2: $2^{1-x^2}=\frac{1}{2^3}$

$$2^{1-x^2}=2^{-3} \Rightarrow 1-x^2=-3$$

• Basta ahora con resolver esta ecuación de segundo grado.
$1-x^2=-3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

② Resolver $4^{x+1}+2^{x+3}=320$

Resolución:

En algunas ecuaciones es necesario hacer un cambio de variable para su resolución.

• Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, la ecuación puede escribirse:

$$4\cdot 4^x+2^3\cdot 2^x=320 \rightarrow 4\cdot 4^x+8\cdot 2^x=320$$

• Expresando 4^x como potencia de dos,

$$4\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x=320$$

• Se hace el cambio de variable $2^x=y$, (por tanto $2^{2x}=y^2$) y se obtiene:

$$4y^2+8y=320$$

• Basta ahora con resolver esta ecuación:

$$y^2+2y-80=0$$

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-80)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-2\pm 18}{2}=\begin{matrix}\rightarrow -10\\ \rightarrow 8\end{matrix}$$

• Se deshace ahora el cambio $y = 2^x$

$y_1 = -10 = 2^x$. No es posible encontrar un x que verifique esta condición (2^x es siempre positivo)

$y_2 = 8 = 2^x \to x = 3$

• La solución es, por tanto, $x = 3$

1.- Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^{x+3}=25$
2. $5^{3x}=125^{x-2}$
3. $2^{x^2-1}=8$
4. $32^x=4^3 .2^{2x}$
5. $2^{1+x}=4^{2-x}$
6. $5^{x^2-5x+6}=0$
7. $2^{1+x}=4^{2-x}$
8. $3^{x^2-1}.3^{2x-4}.3^5=6561$
9. $\frac{10^x}{10^3}=\sqrt[x]{100^2}$
10. $1000.10^x=\sqrt[x]{100^2}$
11. $\sqrt{a^{6-x}}=a^{3-x}$
12. $\sqrt[2x-1]{216}=6$
13. $\sqrt[x-1]{a^{5-x}}=\sqrt[x+1]{a^{2x+5}}$
14. $\sqrt{a^x\sqrt{a^x\sqrt{a^x}}}=a$
15. $\left(\sqrt{8}\right)^{\sqrt{x-1}}=\sqrt[x-2]{8}$
16. $2^{2x+2}=0,5^{2x-1}$
17. $2^{3x-1}=\frac{1}{\sqrt{8^{2x-3}}}$
18. $5^{2x-2}=\frac{1}{\sqrt{125^{x-3}}}$
19. $5^{2x-1}=\frac{1}{\sqrt{5^{x-3}}}$
20. $16^{2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2^{2x-3}}}$
21. $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7$
22. $2.2^x+2^{2x}=80$
23. $5^x+5^{1+x}=6$
24. $2^{x-1}+\frac{1}{2^{x-3}}=5$
25. $5^{1-x}+5^x=6$
26. $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$
27. $2^{2x+4}-5.\ 2^{x+1}+1=0$
28. $4^x-3.2^{x+1}+8=0$
29. $9^{x+1}+3^{x+2}-810=0$
30. $2^{2x}-10.\ 2^x+16=0$
31. $4^x+2^{x+1}-80=0$
32. $3^{2x-3}+1=4.\ 3^{x-2}$
33. $3^{1-x}+3^{2-x}=4/27$
34. $5^{2x}-6.\ 5^{x+1}+125=0$
35. $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$
36. $2^{x-1}+\frac{1}{2^{x-3}}=5$
37. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x-1}=117$
38. $4^{x-1}+4^{x-2}+4^{x-3}+4^{x-4}+4^{x-5}=341$
39. $2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}+2^{x+5}+2^{x+6}=31$
40. $7^{2x+3}-8.7^{x+1}+1=0$
41. $9^x-2.3^{x+2}+81=0$
42. $4^x+2^x=1056$
43. $3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=4$
44. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=960$

2.- Resolver los siguientes sistemas de logaritmos y exponenciales.

1º	$2^x - 3^{y-1} = 5$ $2^{x+1} + 8 . 3^y = 712$	2º	$2^x + 5^y = 9$ $2^{x+2} - 5^{y+1} = -9$	3º	$2^{x+2y}=32$ $2^{3x-5y}=16$	4º	$5^x=5^y.625$ $2^x.2^y=256$
5º	$3^x+3^y=36$ $3^{x+y}=243$	6º	$3.5^x+2.\ 6^{y+1}=807$ $15 .\ 5^{x-1}-6^y=339$	7º	$2^x+3^y=7$ $2^{x+1}-3^{y+1}=-1$	8º	$2^x+2^y=24$ $2^{x+y}=108$

① Resolver el sistema: $\left.\begin{matrix} 2^x - 4^{2y} = 0 \\ x - y = 15 \end{matrix}\right\}$

Resolución:

•Se despeja x en la segunda ecuación:

$$x = 15 + y$$

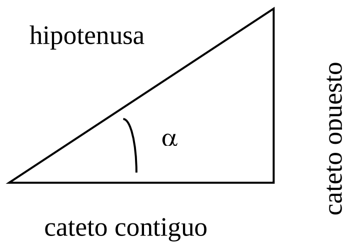
• Se sustituye este valor de x en la primera ecuación

$2^{15+y} - 4^{2y} = 0$ (Pero $4 = 2^2$)
$2^{15+y} - (2^2)^{2y} = 0$
$2^{15+y} - 2^{4y} = 0 \Rightarrow 2^{15+y} = 2^{4y} \Rightarrow$
$\Rightarrow 15 + y = 4y \Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow y = 5$

• Se sustituye el valor de $y = 5$ en $x = 15 + y$:
$x = 15 + 5 = 20$

• Por tanto, $y = 5$ $x = 20$

17º TRIGONOMETRÍA



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

DIRECTAS

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{\text{hipotenusa}}$$

$$tan\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{\text{cateto contiguo}}$$

INVERSAS

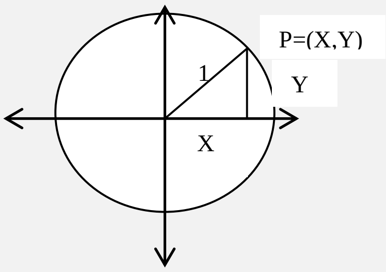
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{tan\alpha} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

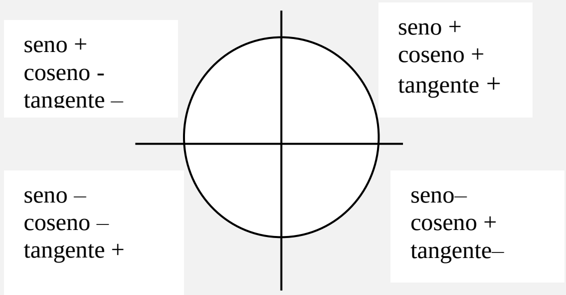
Tomamos la circunferencia de radio 1



$$\text{Sen } \alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\text{sen}}{\text{cos}} = \frac{y}{x}$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS CONOCIDOS

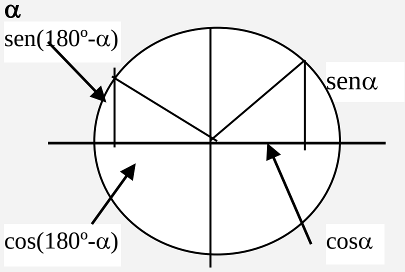
	0º	30º	45º	60º	90º
SENO	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COSENO	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
TANGENTE	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}$ $\boxed{1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha}$ $\boxed{1+\operatorname{cotan}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha}$

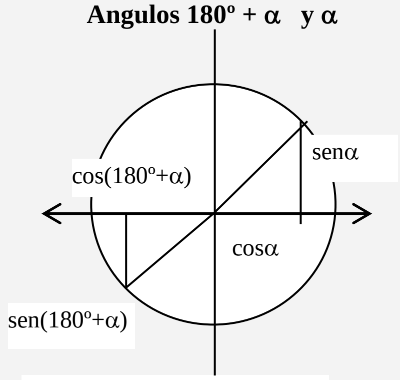
RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES DE CIERTOS ÁNGULOS

Ángulos suplementarios: α y 180º-α



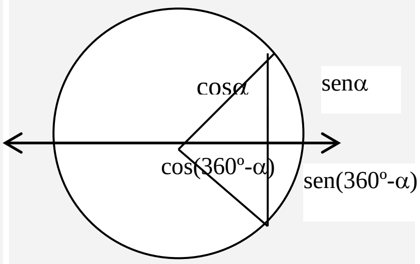
sen(180º-α)=sen α
cos(180º-α)= -cosα
tan(180º-α)= -tanα

Angulos 180º + α y α



sen(180º+α)= -sen α
cos(180º+α)= -cosα
tan(180º+α)=tanα

Ángulos 360º-α y α



sen(360º+α)= -sen α
cos(360º+α)= cosα
tan(360º+α)= -tanα

EJEMPLOS

Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$\text{sen } \alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

$\cos \alpha = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\sec \alpha = 4$

$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$\sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$ $\quad$ $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{sen } \alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\text{tg } \alpha = 2$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{2}$

Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:

a) $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ $\qquad$ **b)** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

a) $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{22}{25} \Rightarrow \cos \alpha\ \frac{\sqrt{22}}{5}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{66}}{22}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

La tangente de un ángulo agudo α es igual a $\frac{4}{3}$. Halla sen α y cos α.

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{16}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow = \frac{9}{25} = \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$

Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 150° $\qquad$ **c)** 225°

b) −120° $\qquad$ **d)** 300°

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } (180 - 30) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 150° = \cos (180 - 30) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 150° = \text{tg } (180 - 30) = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen } (-120°) = -\text{sen } (120°) = -\text{sen } (180 - 60) = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos (-120°) = \cos (120°) = \cos (180 - 60) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\text{tg } (-120°) = -\text{tg } (120°) = -\text{tg } (180 - 60) = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

c) $\text{sen } 225° = \text{sen } (180 + 45) = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 225° = \cos (180 + 45) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

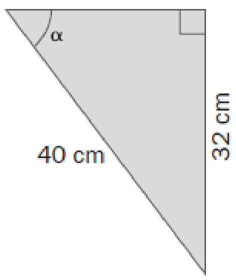
$\text{tg } 225° = \text{tg } (180 + 45) = \text{tg } 45° = 1$

d) $\text{sen } 300° = \text{sen } (-60) = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 300° = \cos (-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

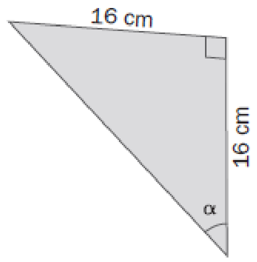
$\text{tg } 300° = \text{tg } (-60) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

Halla las razones trigonométricas del ángulo α en estos triángulos rectángulos.

a)

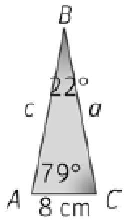


b)

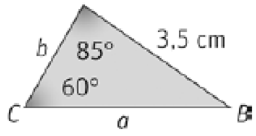


Calcula el lado desconocido en los siguientes triángulos.

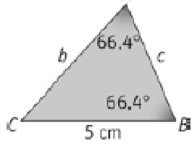
a)



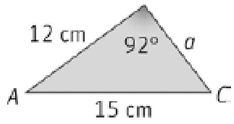
b)



c)

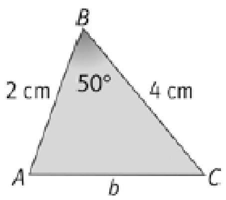


d)

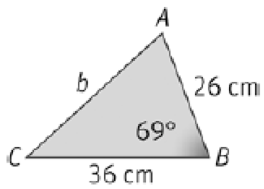


Calcula el valor desconocido.

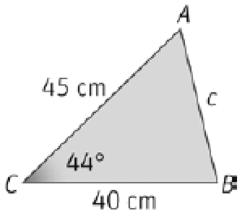
a)



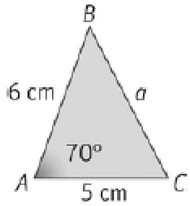
c)



b)



d)



. **Resuelve estos triángulos y clasifícalos.**

a) $a = 5$ cm, $c = 12$ cm, $\hat{C} = 120^\circ$

b) $a = 20$ cm, $b = 12$ cm, $\hat{C} = 100^\circ$

c) $a = 20$ cm, $b = 40$ cm, $c = 25$

d) $\hat{B} = 65^\circ$, $a = 23$ cm, $c = 32$ cm

e) $\hat{B} = 32^\circ$, $\hat{A} = 65^\circ$, $b = 12$ cm

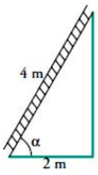
f) $\hat{A} = 38^\circ$, $b = 12$ cm, $a = 16$ cm

1. Calcular el resto de las razones trigonométricas sabiendo que:

1. tan a = 2 y 180º < a < 270 º .
2. sec a = 3 y 270 º < a < 360º.
3. cosec a= $-\sqrt{2}$ y 90º < a < 180º .
4. sen a = -3/4 y 270º <a <360º.
5. cotan a = 1/ 3 y 180º < a < 270 º .
6. sec a = 2 y 270 º < a < 360º.
7. cosec a= 4 y 90º < a < 180º .
8. sen a = - 1/ 4 y 180º < a < 270º .
9. tan a = 2 y 180º < a < 270 º .
10. cos a = 2 / 3 y 270 º < a < 360º.
11. cosec a= 4 /3 y 90º < a < 180º .
12. sen a = -1 /2 y 180º < a < 270º .

TRIÁNGULOS EJEMPLOS

Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los



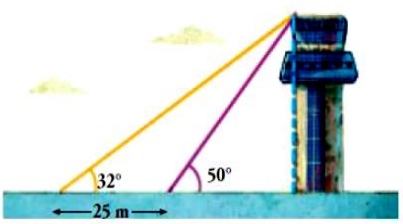
Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

La inclinación de la escalera es de 60° respecto del suelo.

1. Hallar la altura de un edificio sabiendo que desde un punto en el suelo situado a 100m. del edificio , la visual dirigida al punto más altos es de 30º.
2. Las dos ramas de un compás miden 12cms si forman un ángulo de 45º.Calcular el radio de la circunferencia que podemos trazar
3. Un árbol de 8,5 m proyecta una sombra de 2,02m. Calcular el ángulo con el que llegan los rayos solares al suelo.
4. Dado un triangulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cms y forman un ángulo de 70º. Calcular su área.
5. Determinar la altura de una toree, sabiendo que a 16m del pie de la torre se ve el edificio con un ángulo cuyo coseno es 0,5
6. Una de las diagonales de un rombo mide 24 cms. Y los ángulos de un rombo opuestos a dicha diagonal es 116º . Calcular el valor del lado del rombo.
7. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 6 m.
8. Calcular la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 24cms.
9. Calcular la longitud del lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 15cms
10. Un punto del plano dista 20m. del centro de una circunferencia de radio 10 cms. . Obtener la medida del ángulo formado por las dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el punto P
11. Con la ayuda de un teodolito queremos medir la altura del campanario de una iglesia, situándonos a 40 m de la vertical del campanario y sabiendo que el teodolito tiene 1,5m de altura, si el ángulo de visión es de 60º. Calcular dicha altura
12. Dos individuos A y B observan un globo situado en un plano vertical que pasa entre ellos. La distancia entre los dos individuos es de 5 kms. .Los ángulos de elevación son respectivamente 35º y 60º. Hallar la altura del globo y la distancia a cada observador.

Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal.



Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?

$$\left.\begin{array}{l} tg\,32° = \dfrac{h}{25+x} \\ tg\,50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 25tg\,32° + x\,tg\,32° = h \\ x \cdot tg\,50° = h \end{array}\right\}$$

$$25tg\,32° + x\,tg\,32° = x\,tg\,50°$$

$$25tg\,32° = x(tg\,50° - tg\,32°)$$

$$x = \frac{25tg\,32°}{tg\,50° - tg\,32°} = 27{,}56 \text{ m}$$

La altura de la torre es $h = 27{,}56 \cdot tg\,50° = 32{,}84$ m.

13. Desde un punto a ras del suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48º. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14º. Calcular la altura del edificio
14. Un hombre observa que el ángulo de elevación de un globo es de 20º , se acerca 400 m y entonces la elevación es de 56º . ¿Cuánto debe andar el hombre para colocarse debajo del globo?
15. Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48º. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14º. Calcular la altura del edificio
16. Se desea calcular la altura de una torre para ello desde un punto en el suelo la observamos con un ángulo de 30º si nos acercamos 120m.el ángulo pasa a ser de 80º.Calcular la altura.
17. Dos amigos situados a 600 metros entre si observan un globo que está entre ellos con ángulos de 30º y 60º respectivamente. Calcular a la altura a la que se encuentra el globo.
18. Se desea calcular la altura de un edificio para ello desde un punto en el suelo lo observamos con un ángulo de 35º si nos acercamos 100m.el ángulo pasa a ser de 75º.Calcular la altura

19. Dos amigos situados a 500 metros entre si observan una nube que está entre ellos con ángulos de 40º y 70º respectivamente. Calcular a la altura a la que se encuentra la nube

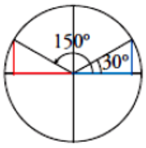
20. Reducir al primer cuadrante

a) 1200º	f) 840º	k) –1935º
b) 1305º	g) –1200º	l) –900º
c) 960º	h) –1215º	m) –1170
d) 1665º	i) –1050º	n) –1320º
e) 1395º	j) –870º	o) 1290

a) $sen\ 150° = sen\ 30°$

$cos\ 150° = -cos\ 30°$

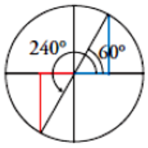
$tg\ 150° = -tg\ 30°$



b) $sen\ 240° = -sen\ 60°$

$cos\ 240° = -cos\ 60°$

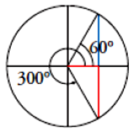
$tg\ 240° = tg\ 60°$



c) $sen\ 300° = -sen\ 60°$

$cos\ 300° = cos\ 60°$

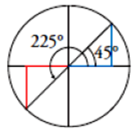
$tg\ 300° = -tg\ 60°$



d) $sen\ 225° = -sen\ 45°$

$cos\ 225° = -cos\ 45°$

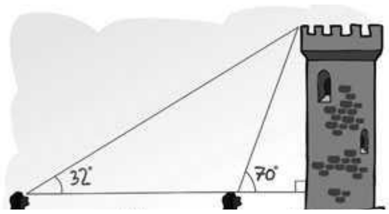
$tg\ 225° = tg\ 45°$



21. Desde el lugar donde se encuentra Yaiza, puede observar una torre con un ángulo de elevación de 32º. Si Yaiza avanza 40 metros en dirección a la torre, la observa con un ángulo de 70º.

a) Calcula la altura de la torre si la estatura de Yaiza es de 1,65 metros.

b) ¿A qué distancia de la torre estaba Yaiza inicialmente?



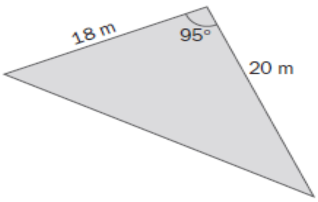
Sea *h* la altura de la torre y *x* la distancia inicial a la que se está de la torre.

Tenemos que:

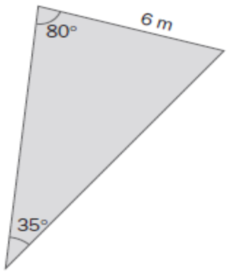
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,32° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow 0{,}625x = h \\ \text{tg}\,70° = \dfrac{h}{x-40} \Rightarrow 2{,}747x - 109{,}88 = h \end{array}\right\} 0{,}625x = 2{,}747x - 109{,}88 \Rightarrow x = \frac{109{,}88}{2{,}122} = 51{,}781 \text{ m}$$

Resuelve estos triángulos.

a)



b)



a) $a^2 = 18^2 + 20^2 - 2 \cdot 18 \cdot 20 \cdot \cos 95° = 786{,}75 \Rightarrow a = 28{,}05$ m

$$\frac{28{,}05}{\text{sen}\,95°} = \frac{18}{\text{sen}\,A} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \frac{18 \cdot \text{sen}\,95°}{28{,}05} \Rightarrow \widehat{A} = 39{,}74°$$

$$\widehat{B} = 180° - 95° - 39{,}74° = 45{,}60°$$

b) $\widehat{B} = 180° - 80° - 35° = 65°$

$$\frac{6}{\text{sen}\,35°} = \frac{c}{\text{sen}\,80°} \Rightarrow c = 6 \cdot \frac{\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,35°} = 10{,}30 \text{ m}$$

$$\frac{6}{\text{sen}\,35°} = \frac{b}{\text{sen}\,65°} \Rightarrow b = 6 \cdot \frac{\text{sen}\,65°}{\text{sen}\,35°} = 9{,}48 \text{ m}$$

Halla la medida de los ángulos y los lados desconocidos en cada caso.

a) $\widehat{A} = 56°$, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm

b) $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 75°$, $a = 25$ cm

c) $a = 38$ cm, $b = 46$ cm, $c = 22$ cm

d) $\widehat{A} = 42°$, $\widehat{C} = 65°$, $b = 14$ cm

a) $a^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \cos 56° = 134{,}74 \Rightarrow a = 11{,}61$ cm

$$\frac{11{,}61}{\text{sen } 56°} = \frac{8}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{8 \cdot \text{sen } 56°}{11{,}61} \Rightarrow \widehat{B} = 34{,}84° \qquad \widehat{C} = 180° - 56° - 34{,}84° = 89{,}16°$$

b) $\widehat{C} = 180° - 45° - 75° = 60°$

$$\frac{25}{\text{sen } 60°} = \frac{b}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{25 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 20{,}41 \text{ cm}$$

$c^2 = 25^2 + 20{,}41^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20{,}41 \cdot \cos 75° = 777{,}44 \Rightarrow c = 27{,}88$ cm

c) $38^2 = 46^2 + 22^2 - 2 \cdot 46 \cdot 22 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = \dfrac{38^2 - 46^2 - 22^2}{-2 \cdot 46 \cdot 22} \Rightarrow \widehat{A} = 55{,}17°$

$$\frac{38}{\text{sen } 55{,}17°} = \frac{46}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{46 \cdot \text{sen } 55{,}17°}{38} \Rightarrow \widehat{B} = 83{,}54° \quad \widehat{C} = 180° - 55{,}17° - 83{,}54° = 41{,}29°$$

d) $\widehat{B} = 180° - 42° - 65° = 73°$

$$\frac{a}{\text{sen } 42°} = \frac{14}{\text{sen } 73°} \Rightarrow a = \frac{14 \cdot \text{sen } 42°}{\text{sen } 73°} = 9{,}80 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 65°} = \frac{14}{\text{sen } 73°} \Rightarrow c = \frac{14 \cdot \text{sen } 65°}{\text{sen } 73°} = 13{,}27 \text{ cm}$$

Vectores. Ecuaciones de la recta

Vector: $\overrightarrow{AB} = B - A$; **Punto medio de un segmento** $\overline{\text{AB}} = \dfrac{A+B}{2}$

Pendiente: Inclinación de la recta, se calcula m = v_2/v_1 = tan α.

La recta: Para calcular la ecuación de una recta necesitamos conocer un punto A(a_1, a_2) y un vector dirección $\vec{V}$ (v_1, v_2), o dos puntos por los que pase la recta, o un punto por donde pasa y la pendiente.

Ecuaciones de la recta:

**Ecuación vectorial:* (x, y) = (a_1, a_2) + λ(v_1, v_2) $\forall \lambda \in$ R

**Ecuaciones paramétricas:* $\begin{cases} x = a_1 + \ \ v_1 \\ y = a_2 + \ \ v_2 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \text{R}$

**Ecuación continua:* $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$

**Ecuación general:* Ax + By + C = 0, en este caso m = -A/B

**Ecuación explícita:* y = mx + n

**Ecuación punto pendiente:* y – a_2 = m(x – a_1)

Posición relativa de dos rectas:

Son coincidentes si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$

Son paralelas si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$

Se cortan en un punto si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$, en este caso se resuelve el sistema para calcular las coordenadas del punto de corte.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad:

*Si nos dicen que r es paralela a s, esto significa que $\vec{V}_r = \vec{V}_s$, o lo que es lo mismo que $m_r = m_s$

*Si nos dicen que r es perpendicular a s, esto significa que $\vec{V}_r \perp \vec{V}_s$, o lo que es lo mismo que $m_r = -1/m_s$

Vectores

EJEMPLOS

Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

EJERCICIOS

1.- Si $\vec{u}$ (–2, 5) y $\vec{v}$ (1, –4) son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $3\vec{u} + \vec{v}$ d) $-\vec{u} - 2\vec{v}$

2.- Si las coordenadas de los vectores y son $\vec{u}$ =(3, –5) y (–2, 1), obtén las coordenadas de:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ b) $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$ c) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{3}{4}(\vec{u} - \vec{v})$

3.- Dados $\vec{u}$ (2, 3), $\vec{v}$ (–3, 1) y $\vec{w}$ (5, 2), calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$ d) $\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v})$

4.- Calcula *x*, de modo que el producto escalar de $\vec{a}$(3, –5) y $\vec{b}$(*x*, 2) sea igual a 7.

5.- Dado el vector $\vec{u}$ (–5, *k*) calcula *k* de modo que:

a) sea ortogonal a $\vec{v}$ (4, –2).

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

6.- Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}$ (*x*, *y*), ortogonal a $\vec{u}$ (3, 4) y que mida el doble que $\vec{u}$.

7.- Dados $\vec{a}$ (2, 1) y $\vec{b}$(6, 2), halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v}.\vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$

8.- Siendo $\vec{u}$ (5, –*b*) y $\vec{v}$ (*a*, 2), halla *a* y *b*, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

9.- Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}$ (3, –2)

c) $\vec{a}$ (1, 6) ,$\vec{b}(-\frac{1}{2}, -3)$ d) $\vec{w}(1,2), \vec{x}(-2,1)$

10.- Dado el vector $\vec{u}$ (6, –8), determina:

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a →u que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$

11.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ = (2, 3) y $\vec{v}$ = (–3, 0), halla *k* de modo que $\vec{a} + \vec{b}$ sea ortogonal a $\vec{a} - \vec{b}$

12.- Halla el valor que debe tener *k* para que los vectores $\vec{x} = k\,\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}$ (1, –3) y $\vec{b}$(2, 5).

13.- Calcula *x* para que los vectores $\vec{a}$ (7, 1) y $\vec{b}$ (1, *x*) formen un ángulo de 45°.

14.- Calcula *x* para que $\vec{a}$ (3, *x*) y $\vec{b}$ (5, 2) formen un ángulo de 60°.

15.- Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}$ (2, 4) y que los módulos de ambos son iguales.

16.-Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}$(–1, –2) un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$

17.- Hallar el valor de x para que el vector $\vec{u}$=(1/3,x) tenga módulo 1.

18.- Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ (- 1,4) y $\vec{v}$ (2,- 3)

Ecuaciones de la recta

Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y cuya ordenada en el origen es –5.

$$\left.\begin{matrix} m = 3 \\ P(0, -5) \in r \end{matrix}\right\} \rightarrow r\text{: } y = -5 + 3(x - 0) \rightarrow$$

$\rightarrow r\text{: } y = 3x - 5 \rightarrow$ ECUACIÓN EXPLÍCITA

$\rightarrow r\text{: } 3x - y - 5 = 0 \rightarrow$ ECUACIÓN IMPLÍCITA

¿Cuál es la posición relativa de estos dos pares de rectas?

a) $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow$ Son paralelas.

b) $\left.\begin{matrix} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x + x - 4 = 0 \\ x = y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 3x = 4 \rightarrow x = 4/3 \\ y = 4/3 \end{matrix}$

Son dos rectas que se cortan en el punto (4/3, 4/3)

Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) Que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -7)$.

$(x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \rightarrow$

$\begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases}$

1.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos dados:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ b)$A(0, -2)$, $B(5, -2)$ c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

2.- Dada la recta: x + 3 = 0

a. ¿En qué forma está escrita?
b. Indica un punto y un vector director de la recta.
c. ¿Pertenece el origen a esta recta?

3.-Dados los puntos A(2, -3) , B(-5 , 5) y C(3,1).

a. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por A y B.
b. ¿Pasa esa recta por el punto C?. Determina otro punto de la recta anterior.

4.- Dada la recta:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 \end{cases} \quad t \in R$$

a. ¿En qué forma está escrita?
b. Indica un punto y un vector director de la recta.
c. ¿Pertenece el origen a esta recta?

5.- Dados los puntos P(- 1, - 2) y Q(5, 1) del plano, hallar la ecuación en forma punto-pendiente de la recta que pasa por P y Q

6.- Sabemos que una recta horizontal pasa por el punto P(-1, 2). ¿Cuál es su ecuación?

7.- Dada la recta 2x + 5y – 4 = 0.

a. Determina un vector director y un punto de la recta.
b. Escribe su ecuación paramétrica

8.- Halla la ecuación general de la recta que pasa por A(-1,2) y B(-3,4).

9.- Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por A(-3,4) y su pendiente vale m=2.

10.-Dados los puntos P(-1,2) y Q(5,1). Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta que pasa por P y Q. Dados los puntos A(1,1) , B(-2,3) y C(0,-1), ¿están alineados?

11.- De la recta r se sabe que pasa por el punto A (2,1) y un vector director es $\vec{u}$ (-2,4). Determina su ecuación en todas las formas

12.- Dados los puntos A (4,-2) y B(10,0), hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos en todas sus formas

13.- La ecuación implícita de una recta es 2x-3y+1=0. Escribe la ecuación de esta recta en forma continua, punto-pendiente, explícita, vectorial y paramétrica

14.- Decir cuál es la pendiente de la recta 2x + 6y + 1 = 0. Calcula un punto de esta recta.

15.-Escribe la ecuación explícita de la recta x + y + 1 = 0, indicando su pendiente y su ordenada en el origen

16.- Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por (– 4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b)Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.
c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

17.- Halla la ecuación de las siguientes rectas:
a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).
b)Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).
c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

18.- Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:
a) $r : y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$
b) $r : 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$
c) $r : x = 3$; $P(0, 4)$

19.- Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

20.- Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$, halla las ecuaciones de las rectas siguientes:
r: pasa por A y es perpendicular a .
s: pasa por B y es perpendicular a .

21.- Calcula n y m para que las rectas $r : 3x + my - 8 = 0$ $s : nx - 2y + 3 = 0$ se corten en el punto $P(1, 5)$.

22.-Estudia la posición relativa de las rectas:
$r : 3x - 5y + 15 = 0$ y s : pasa por (–2, –3) y (8, 3)

23.- Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:
a) $r : 2x - 5y + 3 = 0$
$s : P(3, 1), Q(-2, 3)$
b) $r : 5x - 4y + 8 = 0$
$s : A(4, 7), B(0, 2)$

24.- Halla la ecuación de la recta perpendicular a en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

25.- Las rectas r y s pasan por el punto (–4, 2); r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.

26.- La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.

27.- Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:
a) Las ecuaciones de los tres lados.
b)El punto medio del lado AC.
c) La ecuación de la mediana del vértice B.

28.- En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:
a) La ecuación de la mediatriz de BC.
b) La ecuación de la mediatriz de AC.
c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

29.- Dadas las rectas: $r : 3x + by - 12 = 0$ $s : ax - y + 6 = 0$ calcula el valor de a y b sabiendo que r y s son perpendiculares y que r pasa por el punto (9, –15/2).

30.- Determinar el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ y $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ sean:
a) paralelas
b) perpendiculares

31.- Determinar el valor de m para que las rectas $mx+y=12$ y $4x-3y=m+1$ sean paralelas.

FUNCIONES

Dominio: **Es el conjunto de números reales para los cuales existe imagen mediante la función f(x).**

$$\textbf{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \exists\, f(x)\}$$

Funciones polinómicas.- f(x) = P(x), Dom f(x) = R

Funciones racionales.- f(x) = Polinomio/Polinomio,	$f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$, Dom f(x) = R - $\{\pm 3\}$ **Ejemplo**

Dom f(x) = R - {x ∈ R tales que anulan el polinomio del denominador}.

Funciones irracionales.-

$f(x) = \sqrt{g(x)}$, Dom f(x) = $\{x \in R \,/\, g(x) \geq 0\}$

Ejemplo1 (Sin denominador)

$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$,

Hacemos la tabla de signos

$x^2 - 5x + 6 = 0$, x= 2, x= 3,

+   +   +

2   3

Dom f(x) = (-∞, 2] ∪ [3, ∞)

Ejemplo 2 (Denominador dentro de la raíz)

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x+2}}$, $\dfrac{2x-3}{x+2} \geq 0$, Hacemos la tabla de signos

2x – 3 = 0 ⇒ x = 3/2   +   +   +

x + 2 = 0 ⇒ x = -2   -2   3/2

Dom f(x) = (-∞, -2)∪[3/2. ∞)

Ejemplo 3 (Denominador fuera de la raíz)

Se estudia el signo del numerador y se quita la solución del denominador

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$, $x^2 - 1 \geq 0$

x-2=0 ; x=2

\+   -1   -   1   2

Dom $f(x) = (-\infty, -1\,]\,U\,[1, 2)\,U\,(2, \infty)$

Puntos de corte con los ejes:

Eje OX ⇒ Si y = 0, despejando se obtienen los valores de x.

Eje OY ⇒ Si x = 0, sustituyendo se obtiene el valor de y.

Ejemplo $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$

Eje OX y=0

$\dfrac{2x-4}{x-1} = 0$ 2x-4= 0 ; x=2

Punto de corte (2 ,0)

Eje OY x=0

$\dfrac{2.0 - 4}{0 - 1} = 4$

Puntote corte (0, 4)

Simetrías:

Par ⇒ Se tiene esta simetría cuando f(-x) = f(x). En este caso la función es simétrica respecto del eje OY.

Impar ⇒ Se tienen esta simetría cuando f(-x) = -f(x). En este caso la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, el punto (0, 0).

Ejemplos:

1º $f(x) = x^2 - 1$ como $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$

Es una función simétrica par

2º $f(x) = x^3 - 2x$ como $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) =$

$= -x^3 + 2x = -f(x)$

Es una función simétrica impar

EJEMPLOS

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1º $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x + 2}$ Solución $x + 2 = 0;$ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

2º $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ Solución $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ $D = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

3º $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x^2 - 5x + 6}}$ Solución $\dfrac{x+4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ $D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$

\-   +   -   +

-4   2   3

4º $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - 5}$ Solución $\begin{cases} x - 5 \neq 0 & D = \mathbb{R} - \{5\} \\ x - 2 \geq 0 & D = [2, \infty) \end{cases}$ $D = [2, 5) \cup (5, \infty)$

5º $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ Solución $x^2 - 5x + 6 > 0$ $D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

1º Dadas las siguientes funciones calcular su dominio:

$f_1(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$	$f_6(x)=\dfrac{x+3}{3x-1}$	$f_{11}(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$	$f_{15}(x)=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2-25}$
$f_2(x)=\sqrt{x-4}$	$f_7(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{3x-1}}$	$f_{12}(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-4}}$	$f_{16}(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$
$f_3(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}}$	$f_8(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+5}$	$f_{13}(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-25}$	
$f_4(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$	$f_9(x)=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+5}}$	$f_{14}(x)=\sqrt{\dfrac{2x-4}{x^2-25}}$	
$f_5(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$	$f_{10}(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x-9}$		

2º Calcular el dominio y los puntos de corte de :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}$	e) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$	i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-9}$	l) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$
b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}}$	f) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	j) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^2-9}}$	m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}}$
c) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$	g) $f(x)=\sqrt{x^2-10x+9}$	k) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$	n) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$
d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x^2-4}$	h) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$		o) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$

3º Calcular puntos de corte y simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-4x^2$	**e)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-3x}$	**g)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^3-3x}$	**i)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
b) $f(x)=x^4-2x^2+2$	**f)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-1}$	**h)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3-4x}$	**j)** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x}$
c) $f(x)=x^3-3x$			**k)** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-2}}$
d) $f(x)=x^2-4$			

Composición de funciones **$f_o g(x)=f(g(x))$**	Ejemplo: **$f(x)=3x-1$ $g(x)=x^2-x+2$** **$f_o g(x)=3g(x)-1=3(x^2-x+2)-1=3x^2-3x+6-1=3x^2-3x+5$**	
Función recíproca $f^{-1}(x)$ es una función que satisface: $f^{-1}{}_o f=x$ $f_o f^{-1}=x$	**Ejemplos:** $f(x)=3x-1$	$g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$
	1º Intercambiar x e y $x=3y-1$ 2º Despejamos y : $y=\dfrac{x+1}{3}$ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3}$	1º intercambiar x e y $x=\dfrac{2y-1}{y+2}$ 2º Despejar y: $x(y+2)=2y-1$; $xy-2y=-2x-1$ Sacamos factor común y $y(x-2)=-2x-1$ $y=\dfrac{-2x-1}{x-2}=f^{-1}(x)$

4º Composición de funciones y recíproca .Calcular

1º Sean $f(x) = 3x + 1 \quad g(x) = \dfrac{x-2}{2x+1}$

$f_og_of \quad f^{-1} \quad g^{-1}$

3º Sean $f(x) = 3x - 2 \quad g(x) = \dfrac{3x+1}{2x+2}$

$f_og_of \;;\; f^{-1} \;;\; g^{-1}$

5º Sean $f(x) = \sqrt{x-4} \quad g(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

$f^{-1}, g^{-1}, f_of, f_og,$

7º Sean $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2} \quad g(x) = \dfrac{x+2}{2x+5}$

$f^{-1}, g^{-1}, f_of, f_og,$

6º Sean $f(x) = \sqrt[4]{x^2-2} \quad g(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

2º Sean $f(x) = 5x + 1 \quad g(x) = \dfrac{2x-2}{3x-1}$

$f_og_of \;;\; f^{-1} \;;\; g^{-1}$

4º Sean $f(x) = 5x + 2 \quad g(x) = \dfrac{2x-3}{4x+2}$

$f_og_of \;;\; f^{-1} \;;\; g^{-1}$

$f^{-1}, g^{-1}, f_of, f_og,$

8º Sean $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-2} \quad g(x) = \dfrac{2x-1}{4x+2}$

$f^{-1}, g^{-1}, f_of, f_og,$

5º. Estudiar la continuidad y representar las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \ne 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 1 \\ 4x & 1 < x < 2 \\ x^2 & x \ge 2 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 1 \\ 4x & 1 < x < 2 \\ x^2 - 5x + 6 & x \ge 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 5x & 1 < x < 2 \\ x^2 - 7x + 12 & x \ge 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < 1 \\ 4x & 1 < x < 2 \\ x^2 - 9 & x \ge 2 \end{cases}$

7.- $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & x < -3 \\ x^2 - 4 & -3 \le x < 3 \\ x - 3 & x > 3 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 3x & 1 \le x < 2 \\ \dfrac{3x-4}{x-3} & x \ge 2 \end{cases}$

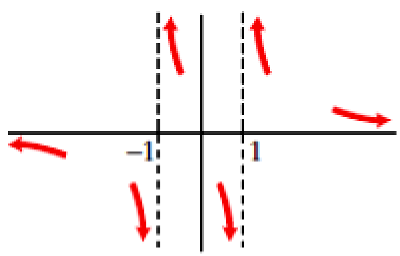
10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & x < -4 \\ x^2 - 1 & -4 < x \le 4 \\ -2x + 8 & x > 4 \end{cases}$

6º Calcula las asíntotas de la siguiente función:

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

Asíntota vertical: $x = 1, \; x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

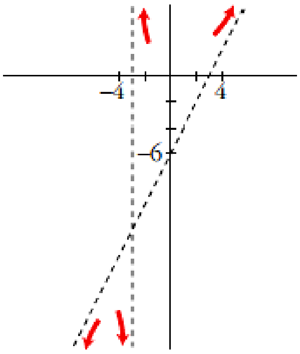


7º Calcularlas asíntotas

$$y = \frac{2x^2}{x+3}$$

Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



8º Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 3x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 25}$

e) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{x^2 - 4}$

i) $f(x) = \dfrac{4x^2}{1 - x}$

j) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 11}{x^2 - 5x + 6}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

ESTUDIO Y REPRESENTACION GRÁFICA DE FUNCIONES AFINES Y CUADRÁTICAS

1. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

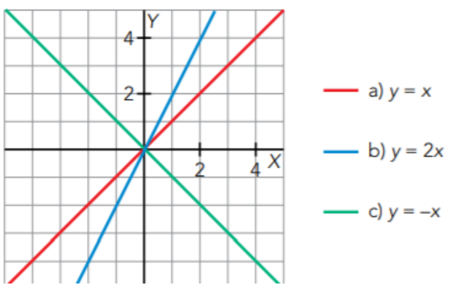
x	$y = x$
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	$y = 2x$
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	$y = -x$
–2	2
0	0
2	–2



d)

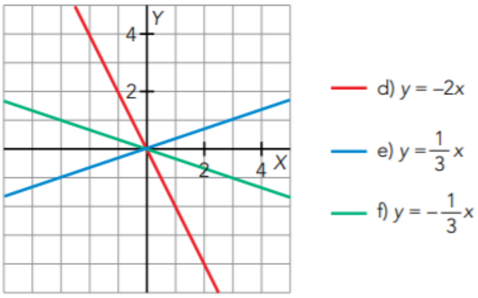
x	$y = -2x$
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	$y = 1/3x$
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	$y = -1/3\,x$
–3	1
0	0
3	–1



g)

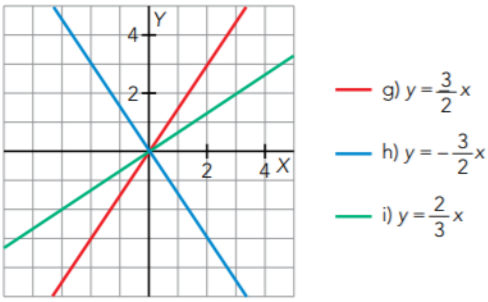
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

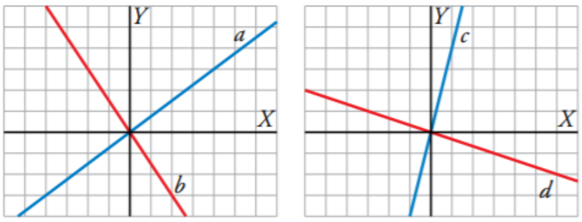
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



2. Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:



Buscamos puntos de coordenadas enteras para calcular la pendiente.

- La recta a pasa por los puntos (0, 0) y (4, 3). Su pendiente es $\frac{3}{4}$. Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x$.
- La recta b pasa por los puntos (0, 0) y (2, –3). Su pendiente es $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es $y = -\frac{3}{2}x$.
- La recta c pasa por los puntos (0, 0) y (1, 4). Su pendiente es 4. Su ecuación es $y = 4x$.
- La recta d pasa por los puntos (0, 0) y (6, –2). Su pendiente es $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$.

3 LA FUNCIÓN y = mx + n

d)

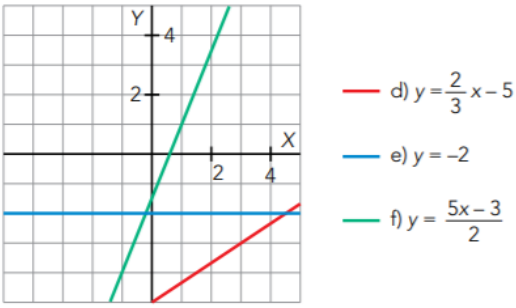
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

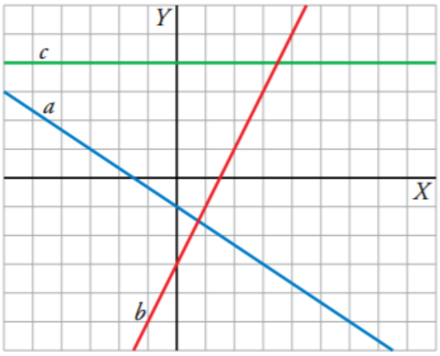
x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje Y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por (0, –1) y (3, –3):

$$\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por (0, –3) y (2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por (0, 4) y (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{0}{4} \\ n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0x + 4 \rightarrow y = 4$$

RECTA DE LA QUE SE CONOCEN UN PUNTO Y LA PENDIENTE

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$ **c)** $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$ **e)** $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x-4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x-0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x+3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x+0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x+1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x+0) \rightarrow y = -2$

RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \frac{6-5}{-3-2} = -\frac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{5} \rightarrow y = 5 - \frac{1}{5}(x-2) \rightarrow y = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x$

b) $m = \frac{-1-(-4)}{-2-3} = -\frac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5} \rightarrow y = -4 - \frac{3}{5}(x-3) \rightarrow y = -\frac{11}{5} - \frac{3}{5}x$

c) $m = \frac{5-0}{5-(-1)} = \frac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\frac{5}{6} \rightarrow y = 0 + \frac{5}{6}(x+1) \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

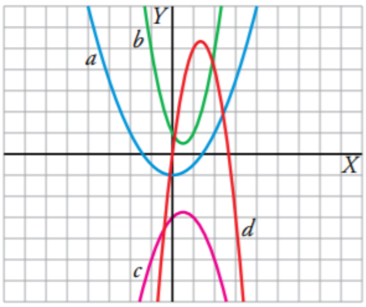
1. Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

2. **Representa las siguientes parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

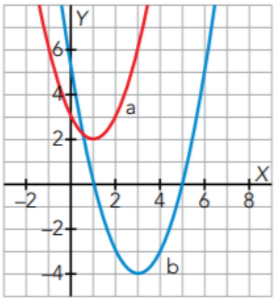
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 4)^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$

d) $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \rightarrow y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-8}{2} = -4$

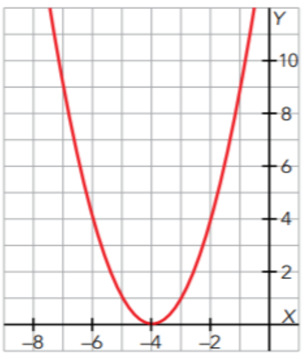
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 16 \rightarrow (0, 16)$

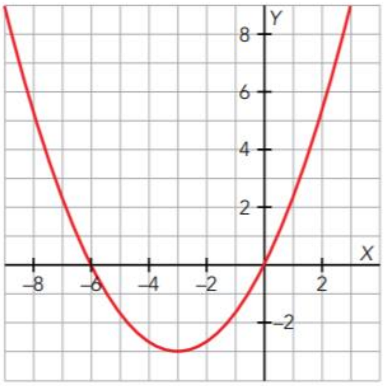
$y = 0 \rightarrow (x + 4)^2 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
Y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$



Calculamos los cortes con los ejes:

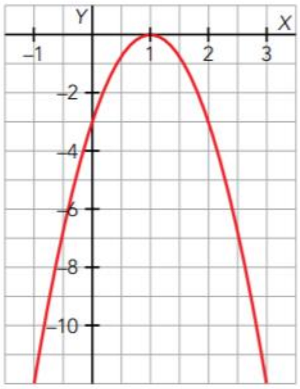
$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -6 \rightarrow (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
Y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9

c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$



Calculamos los cortes con los ejes:

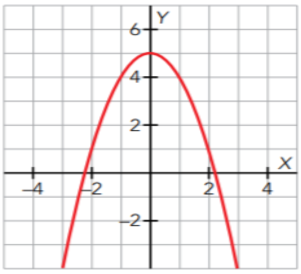
$x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow -3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–1	0	1	2	3
Y	–12	–3	0	–3	–12

d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$



Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
Y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4

Determina el sentido de las ramas, las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 + 4x$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ **d)** $f(x) = 2x^2 - 5x$

a) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V(-2, f(-2)) = V(-2, -4) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = -2$

b) $a = -1 < 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

Vértice $V(2, f(2)) = V(2, 3) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 2$

c) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V(1, f(1)) = V(1, 0) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 1$

d) $a = 2 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V\left(\frac{5}{4}, f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{-25}{8}\right) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = \frac{5}{4}$

FUNCIONES RACIONALES

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

en donde g(x) y h(x) son polinomios. El dominio de la función serán todos los números reales con excepción los números en los cuales se hace cero el denominador.

Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones racionales.

a) $y = \frac{2x+3}{x^2-1}$ **b)** $y = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

a) Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2x+3}{x^2-1} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

Signo de la función:

La función, con $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, corta al eje *X* en el punto $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$: $f(-2) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-1, 1)$: $f(0) = -3 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $\left(\frac{-3}{2}, -1\right)$: $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{88}{9} > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(1, +\infty)$: $f(2) = \frac{7}{3} > 0 \Rightarrow$ Positiva

b) $y = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x + 3$, con $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0)$

Signo de la función:

La función, con $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, corta al eje *X* en el punto $(-3, 0)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -3)$: $f(-4) = -1 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-3, 1)$: $f(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(1, +\infty)$: $f(2) = 5 > 0 \Rightarrow$ Positiva

Una función es racional si: F (X) = g(x)/ h(x)

en donde g(x) y h(x) son polinomios. El dominio de la función serán todos los números reales con excepción los números en los cuales se hace cero el denominador.

Determina las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones racionales.

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$ **b)** $y = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$ **c)** $y = \frac{3x-2}{x^2-5x+6}$

a) Asíntotas horizontales

Como grado (x)= 1 < grado $(x^2 - 1) = 2$, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntotas verticales

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$, la función tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

b) Asíntotas horizontales

Como grado $(2x^2 + x + 1) = 2 >$ grado $(x - 1) = 1$, entonces la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntotas oblicuas

Como $\dfrac{2x^2+x+1}{x-1} = 2x+3+\dfrac{4}{x-1}$, la función tiene una asíntota oblicua en $y = 2x + 3$.

c) Asíntotas horizontales

Como grado $(3x - 2) = 1 <$ grado $(x^2 - 5x + 6) = 2$, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntotas verticales

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$, la función tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 3$.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

. **Determina el dominio, los puntos de corte y las asíntotas de las siguientes funciones. Luego, trata de esbozar sus gráficas.**

a) $y = x+1+\dfrac{x^2}{x-4}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{x+1}$

a) $y = x+1+\dfrac{x^2}{x-4} = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-4} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{41}}{4} \Rightarrow \left(0, \dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$ y $\left(0, \dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right)$

Asíntotas horizontales

Como grado $(x^2 - 3x - 3) = 2 >$ grado $(x - 4) = 1$, entonces la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$, la función tiene una asíntota vertical en $x = 4$.

Asíntotas oblicuas

$$\frac{2x^2-3x-4}{x-4} = 2x+5+\frac{16}{x-4} \Rightarrow y = 2x+5$$

b) $y = \dfrac{2x}{x+1}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow (0, 0)$

Asíntotas horizontales

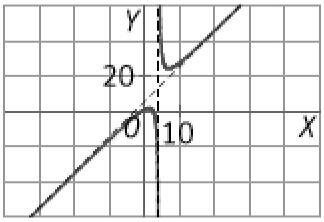
Como grado $(2x) = 1 =$ grado $(x + 1)$, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

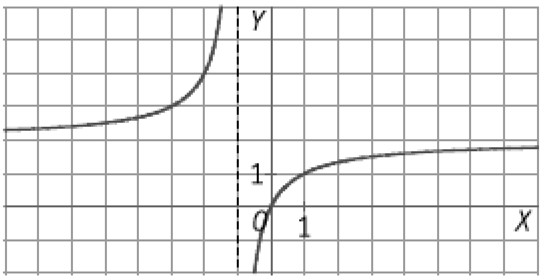
Asíntotas verticales

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, la función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.





ESTADÍSTICA

DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS UNIDIMENSIONALES

Definiciones:

Población: Conjunto de elementos objeto de estudio

Muestra: Subconjunto de la población sobre la que se realiza el estudio. Su tamaño es N

Carácter: Característica que se estudia. Puede ser cualitativo o cuantitativo

Variable estadística (x_i): Conjunto de valores que toma un carácter cuantitativo

Variable estadística discreta: cuando puede tomar un número finito de valores

Variable estadística continua: cuando puede tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo de la recta real

Frecuencia absoluta (f_i): Es el número de veces que se repite cada valor de la variable estadística x_i

Frecuencia absoluta acumulada (F_i): Para un valor de x_i es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores anteriores a x_i, mas la de x_i. $F_i = f_1 + f_2 + ...+ f_i$.

Frecuencia relativa (h_i): Para un valor de x_i es $\frac{f_i}{N}$

Frecuencia relativa acumulada (H_i): Para un valor de x_i es la suma de todas las frecuencias relativas de todos los valores anteriores a x_i, mas la de x_i. $H_i = h_1 + h_2 + ...h_i$.

Tablas de frecuencias: Son tablas de conteo donde ponemos los valores de x_i ordenados y las cuatro frecuencias.

Representaciones gráficas: Se emplean diagramas de barras para variables estadísticas discretas e histogramas para variables estadísticas continuas, a no ser que se nos pida alguna otra representación específica.

Cálculo de parámetros

De Centralización

Media aritmética	$\mu = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i f_i}{N}$
Moda	**M_o:** Valor de x_i que tiene mayor frecuencia, f_i
Mediana	**Me:** Valor de x_i que ocupa en la tabla la posición $\frac{N+1}{2}$ La posición se mira en la columna de F_i, el primer valor que pasa del número obtenido
Cuartiles: Valores de x_i que dividen la distribución en 4 partes iguales	Q_1: Valor de x_i que ocupa la posición N/4. Q_2: Mediana. Q_3: Valor de x_i que ocupa la posición 3N/4. La posición se mira en la columna de F_i, el primer valor que pasa del número obtenido
Deciles: Valores de x_i que dividen la distribución en diez partes iguales	D_i valor de x_i que ocupa el lugar i.N /10. i es el número de decil
Percentiles: Valores	

de x_i que dividen la distribución en cien partes iguales	P_i valor de x_i que ocupa el lugar i.N/100. i es el número de percentil

De dispersión				
	Rango: Diferencia entre el mayor valor de x_i y el menor	**Varianza:** $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{N} - \overline{X}^2$	**Desviación típica:** $S = \sqrt{S^2}$	**Desviación media:** $D_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{x} \rvert f_i}{N}$
Intervalos de confianza	Para distribuciones unimodales y simétricas o ligeramente asimétricas, se verifica que: 1.- En el intervalo ($\overline{x} - \mu,\ \overline{x} + \mu$), se encuentran el 68% de los datos 2.- En el intervalo ($\overline{x} - 2\mu,\ \overline{x} + 2\mu$), se encuentran el 95% de los datos 3.- En el intervalo ($\overline{x} - 3\mu,\ \overline{x} + 3\mu$), se encuentran el 99% de los datos			
Coeficiente de variación	$D = \frac{S}{\overline{X}}$. Relaciona una medida de dispersión (S), con una medida de centralización ($\overline{X}$)			

Ejemplos

1.- El consumo de unidades de un determinado producto en 100 establecimientos de una ciudad fue el siguiente:

28, 32, 45, 6, 12, 93, 36, 74, 10, 16, 49, 5, 32, 47, 76, 80, 8, 95, 16, 68, 35, 73, 59, 27, 9, 86, 42, 19, 58, 37, 29, 6, 88, 20, 5, 90, 91, 13, 46, 29, 97, 38, 56, 12, 7, 63, 24, 91, 85, 73, 92, 26, 8, 42, 35, 97, 91, 43, 64, 92, 57, 23, 54, 6, 21, 39, 63, 47, 55, 61, 94, 52, 23, 74, 67, 9, 18, 39, 61, 86, 25, 47, 69, 73, 12, 5, 42, 7, 39, 45, 6, 93, 18, 75, 41, 23, 52, 37, 21, 95

Construir una tabla de frecuencias de datos agrupados en seis intervalos de igual amplitud comenzando en 3,5 y representar su frecuencia absoluta. Calcular la media aritmética, mediana, moda, primer y tercer cuartil, percentil 90, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.

Intervalos	**marca de clase x_i**	**f_i**	**F_i**	**h_i**	**H_i**	**$x_i f_i$**	**$x_i^2 f_i$**
(3,5, 19,5)	11,5	23	23	23/100	23/100	264,5	3041,75
(19,5, 35,5)	27,5	17	40	17/100	40/100	467,5	12856,25
(35,5, 51,5)	43,5	19	59	19/100	59/100	826,5	35952,75
(51,5, 67,5)	59,5	14	73	14/100	73/100	833	49563,5
(67,5, 83,5)	63,5	10	83	10/100	83/100	635	40322,5
(83,5, 99,5)	91,5	17	100	17/100	1	1555,5	142328,25
		100				4582	284065

Media: $\overline{X} = \frac{4582}{100} = 45{,}82$

Intervalo modal: (3,5, 19,5)

$M_o = 35 + 16\frac{23}{23+6} = 47{,}68$

Intervalo de mediana: (35,5, 51,5)

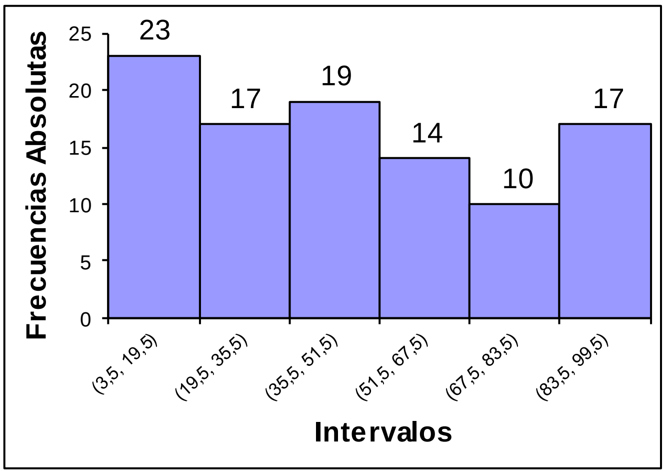
$M = 35{,}5 + 16\frac{50-40}{19} = 43{,}92$

Intervalo de Q_1: (19,5, 35,5)

$Q_1 = 19{,}5 + 16\frac{25-23}{17} = 21{,}38$

Intervalo de Q_3: (67,5, 83,5)

$Q_3 = 67{,}5 + 16\frac{75-73}{10} = 70{,}7$



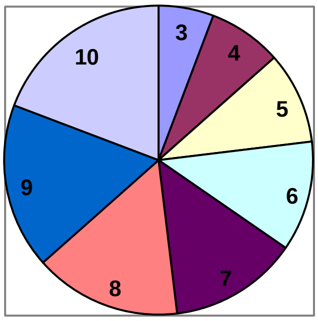
Intervalo de P_{90}: (83,5, 99,5) $P_{90} = 83{,}5 + 16\frac{90-83}{17} = 90{,}08$

$S^2 = \frac{284065}{100} - (45{,}82)^2 = 741.1776$, $S = \sqrt{741{,}1776} = 27{,}22$, d = 27,22/45,82 = 0,59

2.- Las calificaciones de 40 alumnos de una determinada clase en una asignatura son las siguientes:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2	3	7	8	6	6	5	3

Construir una tabla de frecuencias y representar los datos en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores. Calcular la media aritmética, mediana, moda, primer y tercer cuartil, percentil 90, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.



x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
3	2	2	2/40	2/40	6	18
4	3	5	3/40	5/40	12	48
5	7	12	7/40	12/40	35	175
6	8	20	8/40	20/40	48	288
7	6	26	6/40	26/40	56	392
8	6	32	6/40	32/40	48	384
9	5	37	5/40	37/40	45	405
10	3	40	3/40	1	30	300
	40				280	2010

$\overline{X} = \frac{280}{40} = 7$, $d = \frac{1{,}11}{7} = 0{,}15$ Mo = 6 Posición de la mediana = 21.5; $M = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$

Posición de Q_1 = 10; Q_1 = 5 Posición de Q_3 = 30; Q_3 = 8 Posición de P_{90} = 36; P_{90} = 9

Varianza = $S^2 = \frac{2010}{40} - 7^2 = 1{,}25$, $S = \sqrt{1{,}25} = 1{,}11$

EJERCICIOS

1º Los casos de tétanos por provincias registrados en España durante el año 1986 fueron los siguientes (datos del INE)

0 , 0, 0, 5, 8, 1, 0, 0, 10, 2, 1, 0, 1, 3, 0, 2, 1, 0, 3, 5, 1, 0, 0, 0, 3, 1, 1, 2, 0, 3, 3, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0 ,5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

a) Obtener la tabla de frecuencias absolutas y relativas
b) Calcular la media, mediana y moda
c) Calcular la varianza y desviación típica.

2º Los resultados que se obtienen al lanzar 50 veces el mismo dado son:

5, 5, 5, 4, 3, 2, 3, 5, 2, 4, 3, 2, 4, 6, 5, 6, 6, 3, 3, 1, 1, 4, 5, 6, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 1, 5, 6 2, 3, 4, 1, 4, 4, 6, 1, 6, 5, 6, 5, 1, 4, 2, 3, 4

a) Obtener la tabla de frecuencias absolutas y relativas
b) Calcular la media, mediana y moda
c) Calcular la varianza ,desviación típica y desviación media.
d) Calcular el tercer cuartel y el percentil 30

3º Dada la siguiente distribución:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	12	20	28	40	2

a) Dibujar los polígonos de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas
b) Calcular media, mediana , moda y segundo quintil.
c) Calcular la varianza y desviación media

4º Las notas de matemáticas de cierto curso fueron:

9 ,8 ,5 ,5 ,5 , 4, 4, 4, 10 ,3, 2, 3, 9, 6, 6, 5 ,3 ,9 ,7 ,5 ,7 ,5 ,4 ,1 ,0, 8, 5, 8, 5, 2, 4, 6, 2, 8, 5, 4

Construir la tabla de frecuencias absolutas y relativas . Dibujar el diagrama de barras de las frecuencias absolutas Calcular la nota media aritmética, la nota mediana, la nota moda y la nota percentil 70.

5º Dibujar el polígono de frecuencias absolutas y calcular la media aritmética ,la medina ,la moda ,el primer cuartil y el decil 7 de:

x_i	7	8	3	5	13
f_i	6	4	7	3	5

6º Dibujar el diagrama de barras y calcular la media aritmética, la medina ,la moda, el tercer cuartil y el percentil 11 de:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	21	28	6	16	14	5

Calcular también las desviaciones típicas y medias.

7º Las edades de los componentes de una peña de tute so las siguientes:

60	70	17	67	44	38	31	18	24	21
27	53	55	20	48	66	33	18	75	60
21	16	86	52	47	38	69	70	57	26

Reunir en 9 intervalos de longitud constante , construir la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas y calcular la media moda y mediana.

8º Las edades de los alumnos de un instituto en el turno nocturno son:

18	25	22	23	22	22	35	18	27	20	21	28	27
21	19	22	18	33	28	20	18	21	23	23	34	32
29	25	18	25	21	23	36	24	26	24	37	22	23
31	19	35	21	20								

Agrupar en cinco intervalos de igual longitud . Dibujar el histograma correspondiente. Calcular la edad media, la edad mediana , la edad moda y la edad tercer cuartel.

9º La asistencia de personas a cierto espectáculo por sus edades sigue la siguiente tabla de frecuencias:

Edad en años	**Frecuencia**
[10 - 20)	10
[20 - 30)	20
[30 - 40)	30
[40 - 50)	24
[50 - 60)	14
[60 - 70)	10
[70 - 80)	5

1) Completar la tabla de frecuencias
2) Calcular la media y la mediana
3) Dibujar los histogramas
4) Calcular la desviación típica
5) Calcular el primer cuartel y el decil 9.

10º .- El número de piscifactorías por provincias en España en el año 1985 es:

1	4	0	0	27	0	6	1	2	0	7	0	5
2	11	0	0	13	7	3	5	0	23	0	0	0
5	0	2	12	9	8	3	17	3	4	0	3	5
4	1	5	2	4	7	4	1	2				

Agrupar en intervalos de longitud 4 . Dibujar el histograma. Calcular la media mediana y moda de la distribución. Calcular la varianza. Otener el coeficiente de variación

12 º El número de afectados por una afección pulmonar en menores de 40 años en un hospital viene dada por la tabla

años	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
Número	3	2	3	3	7	10	12	8

Se pide:
1) Las marcas de clase
2) El intervalo mediano
3) El coeficiente de variación, es decir, el coeficiente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media.

13º La siguiente tabla da las edades a las que comenzaron a sentarse los niños de una muestra particular:

Meses	12	11	10	9	8	7	6	5
Frecuencia	1	6	7	14	28	35	21	10

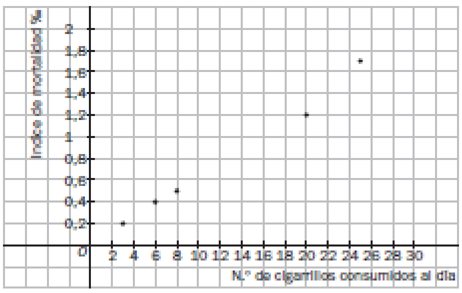
a) Obtener las frecuencias relativas
b) Construir el diagrama de barras
c) ¿Cuál es la mediana?
d) Obtener el coeficiente de variación

Observa la siguiente variable bidimensional.

N.º de cigarrillos consumidos al día	**3**	**6**	**8**	**20**	**25**
Índice de mortalidad	**0,2**	**0,4**	**0,5**	**1,2**	**1,7**

a) Representa la nube de puntos.
b) Indica el tipo de correlación.

a) La nube de puntos es la siguiente:



b) Como al aumentar el número de cigarrillos consumidos aumenta el índice de mortalidad, la correlación es positiva.

Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.

N.º de horas de estudio	1	2	3	4	5
N.º de horas de televisión	5	4	3	3	1

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) Indica el tipo de correlación.

Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.

X	3	6	8	20	25
Y	0,2	0,4	0,5	1,2	1,7

a) Calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables X e Y.

b) Calcula la covarianza de la variable (X, Y).

Consideramos la siguiente tabla:

N.º de cigarrillos x_i	Índice de mortalidad y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
3	0,2	9	0,04	0,6
6	0,4	36	0,16	2,4
8	0,5	64	0,25	4
20	1,2	400	1,44	24
25	1,7	625	2,89	42,5
62	4	1134	4,78	73,5

Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.

X	13	14	11	13	14	14	15	22
Y	54	52	54	53	53	50	49	42

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Halla la recta de regresión.

c) Si $x = 12$, ¿cuánto valdrá y?

d) ¿Es fiable esta predicción? Justifícalo.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
13	54	169	2916	702
14	52	196	2704	728
11	54	121	2916	594
13	53	169	2809	689
14	53	196	2809	742
14	50	196	2500	700
15	49	225	2401	735
22	42	484	1764	924
116	407	1756	20819	5814

a) $\overline{x} = \dfrac{116}{8} = 14,5$

$\overline{y} = \dfrac{407}{8} = 50,875$

$s_X = \sqrt{\dfrac{1756}{8} - 14,5^2} = 3,0414$

$s_Y = \sqrt{\dfrac{20\,819}{8} - 50,875^2} = 3,7562$

$s_{XY} = \dfrac{5814}{8} - \overline{x} \cdot \overline{y} = -10,9375$

$r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = -0,9574$

b) $y - \overline{y} = \dfrac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y - 50,875 = \dfrac{-10,9375}{9,2501}(x - 14,5) \Rightarrow y = 50,875 - 1,1824(x - 14,5)$

c) Para $x = 12 \Rightarrow y = 50,875 - 1,1824(12 - 14,5) \Rightarrow y = 53,831$

d) La predicción es fiable pues el valor del coeficiente de correlación, $-0,9574$, está muy próximo a -1.

La siguiente tabla muestra los valores de una variable bidimensional.

X	0,25	1,32	1,24	0,17	−0,12
Y	0,33	0,63	1,55	0,46	0,21

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Indica el tipo de correlación que existe entre ambas variables.

En la siguiente variable bidimensional:

X	1	2	3	4	3	7	6	3	4	5
Y	45	30	30	25	25	10	20	15	10	15

a) Halla su centro de masas y su covarianza.

b) Calcula su coeficiente de correlación lineal.
¿Tiene sentido calcular su recta de regresión y realizar predicciones?

c) Calcula su recta de regresión.

d) Si el valor de la variable *X* es 15, ¿cuál es el valor estimado de la variable *Y*?

e) Si el valor de la variable *Y* es 13, ¿cuál es el valor estimado de la variable *X*?

TÉCNICAS DE RECUENTO

COMBINATORIA

Es una herramienta de la probabilidad. que sirve para contar. Para distinguir entre variaciones, permutaciones y combinaciones nos haremos las siguientes preguntas:

1.- ¿Pueden aparecer elementos repetidos?

SI: ¿En todos los elementos cada objeto se repite el mismo número de veces?

SI ⇒ Permutaciones con repetición $P^{m}_{n1,\ n2,\ \ ns} = \dfrac{m!}{n1!\,n2!\quad ns!}$

NO ⇒ Variaciones con repetición $VR_{m,n} = m^{n}$

NO: 2.- ¿En cada elemento escribimos todos los objetos?

SI ⇒ Permutaciones $P_m = m!$

NO ⇒ 3.- ¿Importa el orden?

SI ⇒ Variaciones ordinarias Vm,n = m(m-1)(m-2).....(m-n+1)

NO ⇒ Combinaciones $C_{m,n} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

EJEMPLOS

¿Cuántos número de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6?

$$VR_{6,4} = 6^4 = 1296$$

¿De cuántas maneras se pueden repartir seis juguetes entre cuatro niños de forma que cada niño reciba un sólo juguete?

$$V_{6,4} = 6.5.4.3 = 360$$

Cinco amigos van al teatro. ¿De cuantas formas pueden colocarse en las cinco butacas adquiridas?

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Si queremos que una quiniela tenga 7 unos, 4 equis y 3 doses. ¿De cuantas formas podemos rellenarla?

$$P^{14}_{7,4,3} = \frac{14!}{7!4!3!} = 120.120$$

En un grupo de cuarenta alumnos se eligen tres para formar una comisión. ¿De cuantas formas puede constituirse la comisión?

$$C_{40,3} = \binom{40}{3} = \frac{40!}{3!37!} = \frac{40.39.38}{3.2} = 9880$$

Ejercicios

1º ¿Cuántos números de 2 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4,5 y 6 sin que se repita ninguna de ellas?
2º Un ayuntamiento va a sortear 6 puestos ambulantes para las fiestas locales entre 10 solicitantes: Teniendo en cuenta que el lugar asignado influye mucho en las ventas ¿de cuántas formas se podrás realizar la adjudicación de los 6 puestos?
3º Un partido político tiene 18 candidatos para formar las listas de unas elecciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar a los 4 primeros de la lista?
4º Pedro tienen que colocar en una estantería 10 libros ¿De cuántas maneras tiene de colocarlos?
5º Si se reúnen cinco amigos ¿de cuántas maneras pueden intercambiar saludos?
6º Una ONG dedicada a la conservación del medio ambiente quiere hacer un grupo de trabajo de cuatro personas entre sus 96 miembros ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
7º ¿Dé cuantas maneras distintas se pueden sentar los 12 alumnos de una clase en los cuatro asientos de la primera fila?
8º Un chico coloca todos los días los 6 libros de texto en su estantería al llegar a casa ¿De cuántas maneras los puede colocar?
9º Con las letras de la palabra FLAMENCO ¿Cuántos grupos diferentes podemos formar?
10º La comida básica de un poblado está basada en el arroz, las judías, el maíz y la patata.¿Cuántos platos distintos se pueden formar mezclando tres alimento?
11º En un juego de cartas cada mano está formada por 4 cartas. Si la baraja tiene 40 cartas ¿Cuántas manos distintas podemos repartir?
12º En mi clase somos 18 alumnos.

a) ¿De cuantas maneras podemos repartir el podium en una carrera de velocidad?
b) Si se convocan concursos de pintura, poesía y redacción y solo gana uno, ¿de cuantas maneras se peden repartir los premios?
c) Si formamos grupos de 3 personas para hacer un trabajo ¿Cuántos grupos distintos podemos formar?

13º Si deseamos unir los 5 pueblos de una comarca entre si por carreteras ¿De cuántas maneras distintas podemos hacerlo?

14º Una persona ha olvidado la clave de su tarjeta sabe que empieza por 9 y que termina en par, si las claves son de 4 cifras con posible repetición ¿Cuántas posibilidades hay?
15º En la liga polideportiva de los colegios de una ciudad participan 20 equipos.
a) ¿Cuántos encuentros diferentes hay si juegan todos con todos?
b) ¿De cuantas maneras se reparten los tres primeros premios?
16º Con las 27 letras del alfabeto
22. ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas podemos formar?
23. ¿Cuántas empiezan y terminan en vocal?
24. ¿Cuántas empiezan por vocal y terminan en consonante?
17º Un partido político tiene 18 candidatos para formar las listas de unas elecciones. ¿De cuántas formas diferentes se puede ordenar a los cuatro primeros de la lista?
18º En una clase de 30 alumnos se van a elegir el delegado el subdelegado y secretario ¿De cuántas formas diferentes se pueden asignar los tres cargos?
19º ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?
20º En España las matrículas de los coches están formadas por 4 números repetidos o no, seguidos de tres letras consonantes repetidas o no exceptuando la "ñ" la "q "la "ll" y la "ch" ¿Cuántos coches se podrán matricular con este sistema?

PROBABILIDAD

EL LENGUAJE DE LOS SUCESOS

Experimento aleatorio: Es en el que no se sabe el resultado de antemano.

Experimento determinista: Es el que se sabe el resultado de antemano.

Espacio muestral, E: Es el conjunto de todos los posibles resultados de un cierto experimento aleatorio. E = {.....} Card(E) = n

Suceso aleatorio: Es cada uno de los posibles subconjuntos del espacio muestral E.

Espacio de sucesos, S: Es el conjunto d todos los sucesos de un cierto experimento aleatorio.
S = {.....} Card(S) = 2^n.

Verificación de sucesos: Se dice que un suceso se verifica si al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso.

Inclusión de sucesos: Se dice que el suceso A está incluido en el suceso B ($A \subset B$) si siempre que se verifica A también se verifica B.

Distintos tipos de sucesos:

Suceso seguro E
Suceso imposible ∅
Suceso elemental: Formado por un sólo elemento
Suceso compuesto: Formado por varios elementos

Suceso contrario A A^c $\overline{A}$: Es el formado por los elementos del espacio muestral que no están en el suceso A. $A^c = E - A$.
Sucesos incompatibles: Dos ó más sucesos son incompatibles si no pueden verificarse simultáneamente. En caso contrario se llaman compatibles.

Operaciones con sucesos:

Unión de sucesos A∪B: Cuando se verifica A ó B

Intersección de sucesos A∩B: Cuando se verifican A y B simultáneamente

Probabilidad de un suceso:

Def. clásica, (Laplace):

P(A) = nº casos favorables/nº de casos posibles.

Probabilidad de la unión de sucesos, ó, alguno, al menos uno ≈ ∪:

-Sucesos incompatibles (los que no tienen nada en común, A∩B = ∅):

P(A∪B) = P(A)+P(B)

-Sucesos compatibles (los que tienen algo en común, A∩B ≠ ∅):

P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Ejemplos

a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

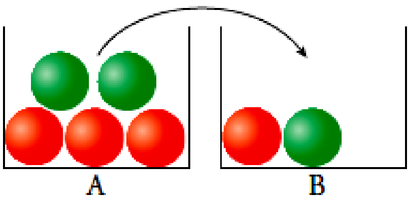
a) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

b) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1\,560} = \frac{1}{130}$

$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{132}{1\,560} = \frac{11}{130}$

Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:



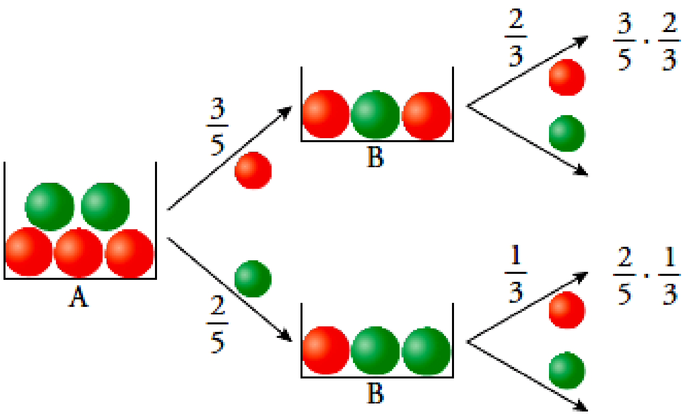
Urna A: 3 rojas y dos verdes
Urna B 1 roja y una verde

a) P[1.ª roja y 2.ª roja] **b)** P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] **d)** P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] **f)** P[2.ª verde]

Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama.



a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

c) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ verde}] = \frac{1}{3}$

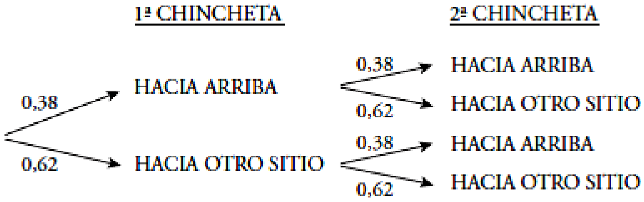
d) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ roja}] = \frac{2}{3}$

e) $P[2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P[2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

■□□ Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



$P[\text{DISTINTA FORMA}] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 = 0{,}47$

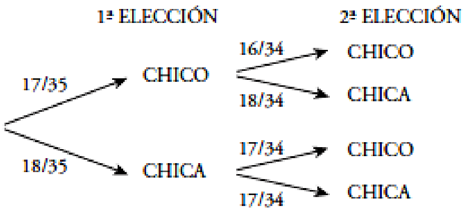
■■□ En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) $P[\text{DOS CHICOS}] = \frac{17}{35} \cdot \frac{16}{34} = \frac{8}{35}$

b) $P[\text{DOS CHICAS}] = \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{34} = \frac{9}{35}$

c) $P[\text{UN CHICO Y UNA CHICA}] = \frac{17}{35} \cdot \frac{18}{34} + \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{34} = \frac{18}{35}$

Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo.

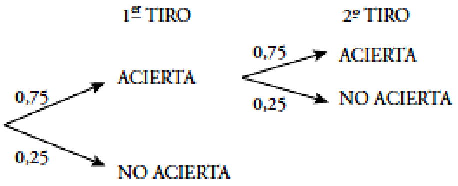
Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos.

b) Haga un punto.

c) No haga ningún punto.

P[ACERTAR] = 0,75



a) P[DOS PUNTOS] = 0,75 · 0,75 = 0,56

b) P[UN PUNTO] = 0,75 · 0,25 = 0,19

c) P[NO HAGA NINGÚN PUNTO] = 0,25

EJERCICIOS

1. Una urna contiene 7 bolas rojas y 5 bolas amarillas, se extraen dos bolas de la urna
Calcular las siguientes probabilidades:

1)que las dos bolas sean del mismo color
2) que las dos bolas sean de diferente color
3)que la segunda bola sea amarilla

2. Se dispone de una bomboneras, la primera contiene 7 bombones de praliné y 6 de chocolate blanco, 8 de chocolate negro, se extraen 2 bombones simultáneamente. Calcular las siguientes probabilidades:

a)realizar el diagrama de árbol
b)que se saque un bombón de praliné y el otro de cualquier sabor
c)que se saquen dos bombones del mismo sabor

3. Pepe, Juan y Antonio participan por este orden en la final de tiro con arco de su municipio, esta se disputa a un sólo disparo de cada uno. La probabilidad de que Pepe haga blanco es del 85%, de que Juan haga blanco es del 89% y de que Antonio haga blanco es del 90%. Calcular las siguientes probabilidades:

a)que los tres hagan blanco
b)que Pepe y Antonio hagan blanco
c) que dos cuales quiera hagan blanco

4. Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 amarillas y 5 negras. Se extraen dos bolas simultáneamente al azar de la urna y se sabe que no es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna sea negra?

5. Un banco tiene tres sistemas de alarma independientes, la probabilidad de que la primera funcione es el 90%, de que funcione la segunda el 85 % y de que funcione la tercera el 99% en caso necesario. Si se produce un robo calcular:

a) Probabilidad de que ninguna alarma se active.
b) Probabilidad de que se activen solo dos alarmas.

6. El 80% de la población italiana tiene teléfono móvil, el 60 % tiene ordenador y el 40 % tiene ambas cosas. Calcular la probabilidad del que elegida una persona al azar que tenga alguna de las dos cosas.

7. En su camino al trabajo una persona pasa por tres semáforos cada mañana. Los semáforos operan independientemente. La probabilidad de una luz roja es de 0,4, 0,8 y 0,5 respectivamente para cada uno de los tres semáforos. Se pide:

a) La probabilidad de que la persona encuentre los tres semáforos en rojo.
b) La probabilidad de que encuentre en rojo uno de ellos y los otros dos en verde o ámbar.

8. En un instituto hay matriculados 200 alumnos de 4º E.S.O. de ellos están matriculados en las siguientes actividades extraescolares: 50 fútbol, 40 baloncesto, 50 tenis, 55 teatro pero 10 de ellos hacen fútbol y tenis y 20 alumnos a baloncesto y tenis, el resto no realiza ninguna actividad extraescolar. Elegido un alumno al zar calcular las siguientes probabilidades:
a) que acuda a fútbol o tenis
b) baloncesto o tenis

c) teatro o fútbol

9. En una determinada ciudad se sabe que, para personas de más de 60 años, la probabilidad de padecer una enfermedad de corazón es de 0,15 y la de padecer artrosis es de 0,25. También se sabe que la probabilidad de sufrir ambas enfermedades es de 0,08. Elegida al azar una persona de más de 60 años. ¿Cual es la probabilidad de que enferme de corazón o artrosis?

10. En una caja hay 30 bombones de los cuales 10 son de almendra, 12 de avellana y el resto de chocolate puro si se escogen dos bombones al azar hallar la probabilidad de que sean de distinto sabor.

11. Andrés tiene 5 pares de zapatos en su armario, si saca dos al azar cual es la probabilidad de que sean pareja.

12. De 50 personas que fueron consultadas sobre su asistencia al cine o al teatro,35 fueron al cine y 10 al teatro, además 4 de ellas asistieron a ambos espectáculos el resto no sabe o no contesta.

a) Representa el diagrama de Venn correspondiente a esta situación

b) con ayuda del diagrama anterior calcula las siguientes probabilidades:

1. P(ir al cine)
2. P(ir al cine y al teatro)
3. P(Ir solo al teatro)
4. P(Ir al cine o al teatro)
5. P(ir al cine o al teatro pero no a ambos)
6. P (no ir ni al cine ni al teatro)

13. Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades 1/2 y 1/5 de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de 1/10. Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen

14. Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y las tres cuartas de las mujeres tienen los ojos castaños. Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga los ojos castaños

15. Se extraen cinco cartas de una baraja de 40 cartas. Hallar la probabilidad de extraer:

a) 4 ases
b) 4 ases y un rey
c) 3cincos y dos ases
d) Sólo dos figuras
e) Tres de un palo cualquiera y dos de otro palo
f) un cinco dos ases y dos reyes

16. Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una.
¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?
b)Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

17. En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres.
a)Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que no fume:
b) Calcula también: *P*[M y F], *P*[M / F], *P*[F / M]

18. Los 1000 socios de un club deportivo se distribuyen de la forma que se indica en la tabla**.**
Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL BALONCESTO	147	135
NO JUEGAN AL BALONCESTO	368	350

a) Sea un hombre.
b)Sea una mujer.
c) Juegue al baloncesto.
d)Sea una mujer que practique baloncesto.
e) Sea un hombre que no practique baloncesto.
f) Juegue al baloncesto, sabiendo que es hombre.
g) Sea mujer, sabiendo que no juega al baloncesto.

19. Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma**?**

20. En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.
Calcula la probabilidad de que:
a) Los dos sean chicos.

b)Sean dos chicas.
c) Sean un chico y una chica
21. Se extraen dos bolas de una bolsa que tiene (4 azules y 3 rojas) Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color**.**
22. Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar.
¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?
a) Que las dos sean de cinco céntimos.
b)Que ninguna sea de un euro.
c) Que saque 1,20 €.
23. Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo. Calcula la probabilidad de que:
a) Haga dos puntos.
b) Haga un punto.
c) No haga ningún punto
24. Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena. Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar