

1

Números naturales, enteros y decimales

Primero, los naturales

Desde los albores de la civilización, la humanidad ha ideado herramientas para controlar el medio en el que vive. Una de estas herramientas, en el ámbito intelectual, han sido los números.

Inicialmente, los números se utilizaban para contar cantidades *naturales* (rebaños, frutos, monedas...), y los sistemas de numeración que se idearon eran tan rudimentarios como hacer muescas en un cayado o dibujar dedos y manos.

Pinturas rupestres en la Cueva de las Manos (Argentina).



Después, los enteros (+, -)...

Los números negativos surgen en Oriente, hacia el siglo v, con el desarrollo del comercio y respondiendo al concepto de *deber* (deuda), en contraste con el de *haber* (tener).

Los inicialmente llamados *números deudos* o *absurdos* no llegaron a Occidente hasta finales del siglo xv. Para distinguirlos de los naturales, empezaron utilizando una “m” (del latín *minus*), y no fue hasta la publicación de un tratado del matemático alemán **Stifel** (1487-1567) cuando aparece la notación +, - para diferenciar los positivos de los negativos.



Ábaco chino.

... y los decimales

La notación específica para los números decimales apareció en Europa en el siglo xvi. El flamenco **Stevin** (1548-1620) escribía tras cada cifra el orden de unidades entre paréntesis: décimas (1), centésimas (2), etc. Fue el escocés **Napier** (1550-1612) quien empezó a separar la parte entera de la decimal con un punto o una coma, tal como seguimos haciendo en la actualidad.



Universidad de St. Andrews (Escocia), en la que Napier cursó estudios.



Estatua en honor a Simon Stevin, Brujas (Bélgica).

6

Nombre y apellidos: Fecha:

Empecemos recordando el cálculo de expresiones con números naturales.

Operaciones combinadas

En las expresiones con operaciones combinadas es necesario respetar el orden prefijado en la normativa matemática, pues no se obtiene el mismo resultado realizando primero unas operaciones que realizando otras.

Observa estas expresiones con los mismos números y las mismas operaciones, pero con significados diferentes:

- $3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$ → Hemos realizado primero la multiplicación.
- $(3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$ → Hemos realizado primero la suma (lo indicaba el paréntesis).

Ejemplo

$$\begin{array}{c}
 8 + 4 \cdot (5 - 2)^2 \\
 8 + 4 \cdot 3^2 \\
 8 + 4 \cdot 9 \\
 8 + 36 \\
 44
 \end{array}$$

PRIORIDAD DE OPERACIONES

- 1.° Los paréntesis → $8 + 4 \cdot (5 - 2)^2 = 8 + 4 \cdot 3^2$
- 2.° Las potencias → $8 + 4 \cdot 3^2 = 8 + 4 \cdot 9$
- 3.° Las multiplicaciones y las divisiones → $8 + 4 \cdot 9 = 8 + 36$
- 4.° Las sumas y las restas → $8 + 36 = 44$

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de estas operaciones:

a) $7 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot (14 - 6) - 33 : (7 + 4)$ b) $25 - 3 \cdot 2^2 + 4 : (12 - 10)^2$

Señalamos en cada paso, en rojo, las operaciones que vamos a realizar, y dejamos las otras indicadas.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 7 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot (14 - 6) - 33 : (7 + 4) &= 7 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 8 - 33 : 11 = \\
 &= 7 - 6 + 40 - 3 = 38
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 25 - 3 \cdot 2^2 + 4 : (12 - 10)^2 &= 25 - 3 \cdot 2^2 + 4 : 2^2 = 25 - 3 \cdot 4 + 4 : 4 = \\
 &= 25 - 12 + 1 = 14
 \end{aligned}$$

Piensa y practica

1. Resuelve estas expresiones en el orden en que aparecen:

- $13 - 2 \cdot 5$
- $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5)$
- $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 7 \cdot 2$

2. Resuelve.

- $5 \cdot 3 - 2 \cdot 6$
- $(14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6$
- $(7 \cdot 2 - 9) \cdot 3 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 6$

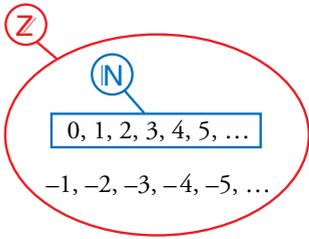
3. Calcula y comprueba que los resultados de los cuatro apartados son diferentes.

- $3 \cdot 2^3 - 7 + 1$
- $3 \cdot 2^3 - (7 + 1)$
- $3 \cdot (2^3 - 7) + 1$
- $3 \cdot (2^3 - 7 + 1)$

4. Calcula paso a paso y comprueba que el valor de cada una de estas expresiones es cero:

- $14 - 2 \cdot (5^2 - 3 \cdot 6)$
- $35 - 2 \cdot 4^2 - (2^3 - 10 : 2)$
- $(6^2 : 4 + 2) - (6^2 - 5^2)$

2 Números enteros



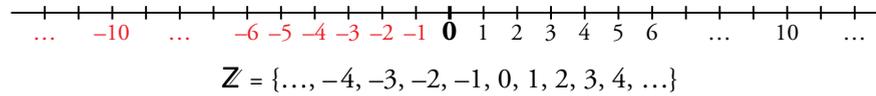
De dónde viene...

¿Por qué la letra **Z** para designar el conjunto de los números enteros?
En alemán, *número* se escribe *zahl*.

El manejo ágil de los números positivos y negativos, que vamos a revisar ahora, será imprescindible para poder seguir avanzando en tu aprendizaje matemático.

El conjunto **Z** de los números enteros

Si al conjunto de los números naturales le añadimos sus opuestos (los negativos), obtenemos el conjunto de los números enteros, que se designa por la letra **Z**.



- El **valor absoluto** de un número es el tamaño de ese número, prescindiendo de su signo. Por ejemplo:

$$|-5| = 5 \quad |5| = 5$$

Suma de números enteros

- Para **sumar dos números del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los números. Por ejemplo:

$$7 + 5 = +12 \quad (-7) + (-5) = -12$$

- Para **sumar dos números de distinto signo**, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto. Por ejemplo:

$$-5 + 7 = 2 \quad 5 + (-7) = -2$$

- Al **quitar un paréntesis** precedido del signo +, los signos de los sumandos interiores quedan como estaban. Pero si está precedido del signo -, cada uno de los signos de los sumandos interiores cambia. Por ejemplo:

$$+(-5) = -5 \quad -(-2) = 2 \quad -(4 - 5 + 1) = -4 + 5 - 1$$

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $2 - 6 - 4 + 7 - 12 + 5 - 11$

b) $(-6) + (+4) + (-8) - (+1) - (-7)$

c) $13 - (6 - 4) + (3 - 11) - (-7)$

a) $2 - 6 - 4 + 7 - 12 + 5 - 11 = 2 + 7 + 5 - 6 - 4 - 12 - 11 = 14 - 33 = -19$

b) $(-6) + (+4) + (-8) - (+1) - (-7) = -6 + 4 - 8 - 1 + 7 = 4 + 7 - 6 - 8 - 1 = 11 - 15 = -4$

c) $13 - (6 - 4) + (3 - 11) - (-7) = 13 - 6 + 4 + 3 - 11 + 7 = 13 + 4 + 3 + 7 - 6 - 11 = 27 - 17 = 10$

Piensa y practica

1. Calcula.

a) $-5 - 12 + 8 - 6 + 4 - 3$

b) $+(+8) + (-6) - (+5) - (-2) + (-3)$

c) $(12 - 15 + 9 - 7) - (2 - 13 + 6 - 1)$

d) $(-9) - (9 - 11) + (-8) - (10 - 7)$

2. Hemos ido midiendo la temperatura en un cierto lugar a diferentes horas del día, observando estas variaciones: subió 2°C , después bajó 3°C y luego bajó otros 5°C .

Si inicialmente había -1°C , ¿cuál fue la temperatura final?

Nombre y apellidos: Fecha:

Regla de los signos

$+$	\cdot	$=$	$+$	} MISMO SIGNO, RESULTADO +
$-$	\cdot	$=$	$+$	
$+$	\cdot	$=$	$-$	} DISTINTO SIGNO, RESULTADO -
$-$	\cdot	$=$	$-$	

Multiplicación y división de números enteros

■ Para **multiplicar** números enteros, recordamos la “regla de los signos” (la tienes a la izquierda).

- El resultado de multiplicar dos números del **mismo signo** es **positivo**.

$$(+4) \cdot (+3) = +12 \quad (-2) \cdot (-7) = +14$$

- El resultado de multiplicar dos números de **distinto signo** es **negativo**.

$$(+4) \cdot (-3) = -12 \quad (-2) \cdot (+7) = -14$$

■ En la **división** se aplica la misma regla de los signos que en la multiplicación.

$$(+12) : (+4) = +3 \quad (-30) : (-5) = +6$$

$$(+18) : (-3) = -6 \quad (-20) : (+4) = -5$$

Potencias de números enteros

Al **eleva**r un número negativo a una potencia, si el exponente es par, el resultado es positivo; y si el exponente es impar, el resultado es negativo.

$$(-2)^4 = 16 \quad (-2)^5 = -32 \quad \text{Pero, } -2^4 = -(2^4) = -16$$

Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas con números enteros las realizamos siguiendo las mismas normas que aplicábamos con los números naturales.

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de estas expresiones:

a) $12 - 2 \cdot [25 : (-4 - 1) + (-2) - (6 - 10)]$

b) $-5 + 4 \cdot (-2 + 1)^3 - (-9 + 6)^2$

Señalamos en cada paso, en rojo, las operaciones que vamos a realizar, y dejamos las otras indicadas.

$$\begin{aligned} \text{a) } 12 - 2 \cdot [25 : (-4 - 1) + (-2) - (6 - 10)] &= 12 - 2 \cdot [25 : (-5) - 2 - (-4)] = \\ &= 12 - 2 \cdot [-5 - 2 + 4] = 12 - 2 \cdot (-3) = 12 + 6 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -5 + 4 \cdot (-2 + 1)^3 - (-9 + 6)^2 &= -5 + 4 \cdot (-1)^3 - (-3)^2 = \\ &= -5 + 4 \cdot (-1) - 9 = -5 - 4 - 9 = -18 \end{aligned}$$

En la web

- Actividades para repasar las operaciones con números enteros.
- Actividades para reforzar las operaciones con números enteros.

Piensa y practica

3. Resuelve expresando el proceso paso a paso.

a) $5 - 6[(12 - 9) + (7 - 11)]$

b) $21 + 4[1 + 2 \cdot (6 - 10)]$

c) $15 - 3[5 \cdot (2 - 8) - (-14)]$

d) $5 - 32 : [9 : (7 - 10) + (-5)]$

e) $7 - 2 \cdot [(3 - 8) : (-5) + 3]$

f) $3 - (-4) \cdot (-6) - [(5 - 9) \cdot (-2) + 1] \cdot (-3)$

4. Resuelve.

a) $(-5)^2 + (-4)^3$

b) $(4 - 1)^3 + (1 - 4)^3$

c) $(7 - 2)^2 + (2 - 7)^2$

d) $(3 - 7)^2 + (3 - 4)^3 + (-3)^3$

e) $(1 - 7)^2 - (7 - 5)^3 + (3 - 5)^5$

f) $(12 - 4 - 5)^4 - [(2 - 6)^2 - (1 - 5)^3]$

Operaciones con decimales

En muchas situaciones de tu vida cotidiana, te encontrarás en la necesidad de interpretar y manejar números decimales.

A continuación, te hacemos una serie de propuestas para que recuerdes algunos aspectos sobre ellos y sus operaciones:

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| a) $1,5 + 0,25$ | b) $3,25 + 2,2$ |
| c) $2,75 - 0,5$ | d) $3 - 2,8$ |
| e) $2,75 \cdot 100$ | f) $3,2 : 10$ |
| g) $6 \cdot 0,5$ | h) $6 \cdot 0,25$ |
| i) $4,8 : 2$ | j) $4,8 : 4$ |

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

- a) ¿Cuánto le falta a 0,5 para llegar a 1?
 b) ¿Cuánto le falta a 2,6 para llegar a 3?

Aún más sencillo

Estima mentalmente, calcula y después compara:

- a) $2,9 \cdot 3,1$
 b) $5,99 : 1,9$
 c) $(4,9 + 1,01) \cdot 2,99$

■ PROPUESTA 1. Calcula mentalmente:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $151,56 + 82,44$ | b) $123,47 - 12,25$ |
| c) $12,8 + 3,2 - 5,1$ | d) $25,4 - 15,2 + 5,8$ |
| e) $0,347 \cdot 100$ | f) $3,482 : 100$ |
| g) $34,25 \cdot 0,01$ | h) $34,25 : 0,01$ |
| i) $14,8 \cdot 0,5$ | j) $24 \cdot 0,25$ |
| k) $14,8 : 0,5$ | l) $2,4 : 0,25$ |

■ PROPUESTA 2. Calcula mentalmente:

- a) ¿Cuánto le falta a 0,85 para llegar a 1?
 b) ¿Cuánto le falta a 3,26 para llegar a 4?
 c) ¿Cuánto le falta a 15,21 para llegar a 16?
 d) ¿Cuánto le falta a 12,36 para llegar a 12,4?
 e) ¿Cuánto le falta a 5,84 para llegar a 5,9? ¿Y a 6?

■ PROPUESTA 3. Recuerda las normas para interpretar las expresiones con operaciones combinadas y calcula:

- a) $0,25 \cdot 100 - 1,75 \cdot 10$
 b) $2 - 0,5 \cdot (6,4 - 2,32)$
 c) $(0,6 - 1,61 : 4,69) \cdot 10$
 d) $6,35 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot (1,7 - 2,4)$
 e) $1,88 - 1,3 \cdot [0,1 \cdot 3 - 5,25 : (3,41 + 3,59)]$

■ PROPUESTA 4.

Observa cómo estimamos el resultado de dividir 14,89 entre 1,48:

— Aproximamos las cantidades: $14,89 \rightarrow 15$; $1,48 \rightarrow 1,5$

— Como $15 : 1,5 = 10$, el resultado de $14,89 : 1,48$ será próximo a 10.

Si ahora realizamos la operación exacta, $14,89 : 1,48 = 10,06081\dots$, vemos que el error cometido en la estimación ha sido menor que una décima.

Ahora inténtalo tú. Estima mentalmente el resultado; después, calcula y compara:

- a) $6,974 \cdot 2,01$
 b) $2,975 : 1,02$
 c) $(3,978 + 4,0125) \cdot 4,986$
 d) $(15,034 - 2,99) \cdot (3,101 + 2,973)$

Problemas con números decimales

PROBLEMA 1

Para conseguir 3,60 €, calcula:

a) ¿Cuántas monedas de veinte céntimos (0,20 €) necesitamos?

b) ¿Cuántas de diez céntimos (0,10 €)?

c) ¿Cuántas de cinco céntimos (0,05 €)?

$$a) 3,60 : 0,20 = 36 : 2 = 18$$

Necesitamos 18 monedas de veinte céntimos.

$$b) 3,60 : 0,10 = 36 : 1 = 36$$

Necesitamos 36 monedas de diez céntimos.

(También podríamos haber pensado que necesitamos el doble de monedas de diez que de veinte céntimos, $18 \cdot 2 = 36$).

$$c) 3,60 : 0,05 = 360 : 5 = 72$$

Necesitamos 72 monedas de cinco céntimos (el doble que de monedas de diez céntimos).

PROBLEMA 2

¿Cuánto cuesta una caja de manzanas de 10 kilogramos, si por 3,5 kg hemos pagado 4,34 €?

$$\text{Coste de un kilo} \rightarrow 4,34 : 3,5 = 1,24 \text{ €}$$

$$\text{Coste de 10 kilos} \rightarrow 1,24 \cdot 10 = 12,40 \text{ €}$$

Una caja de 10 kg de manzanas cuesta 12,40 €.

PROBLEMA 3

Rosa compró en la frutería 0,645 kg de manzanas a 1,35 €/kg; 1,245 kg de peras a 1,25 €/kg, y 2,25 kg de naranjas a 0,95 €/kg. Sabiendo que llevaba 8,56 €, ¿cuánto dinero le sobró?

$$\text{Gasto en manzanas} \rightarrow 0,645 \cdot 1,35 = 0,87075 \rightarrow 0,87 \text{ €}$$

$$\text{Gasto en peras} \rightarrow 1,245 \cdot 1,25 = 1,55625 \rightarrow 1,56 \text{ €}$$

$$\text{Gasto en naranjas} \rightarrow 2,25 \cdot 0,95 = 2,1375 \rightarrow 2,14 \text{ €}$$

$$\text{Gasto total: } 0,87 + 1,56 + 2,14 = 4,57 \text{ €}$$

$$\text{Dinero que le sobró: } 8,56 - 4,57 = 3,99 \text{ €}$$

A Rosa le sobraron 3,99 €.

Podríamos haber escrito todas las operaciones anteriores en una misma expresión. Observa cómo:

$$8,56 - (0,645 \cdot 1,35 + 1,245 \cdot 1,25 + 2,25 \cdot 0,95) =$$

$$= 8,56 - (0,87075 + 1,55625 + 2,1375) =$$

$$= 8,56 - 4,5645 = 3,9955 \rightarrow 4 \text{ €}$$

(El céntimo de diferencia entre los dos resultados se debe a los distintos momentos en que se han hecho los redondeos. En la vida real, el resultado que se tome dependerá de las normas establecidas en el comercio).

Reflexiona

Comprueba que es lo mismo:

a) Dividir entre 0,5 que multiplicar por 2.

b) Dividir entre 0,1 que multiplicar por 10.

c) Multiplicar por 0,5 que dividir entre 2.

d) Multiplicar por 0,1 que dividir entre 10.

Ten en cuenta

Debes usar la calculadora de forma racional. Es lógico utilizarla para calcular

$$3652,28 : 2,789$$

pero no para hallar $12 : 2$; $120 : 10$ u otras operaciones sencillas.

Ejercicios y problemas

Practica

1. Ordena de menor a mayor estos números:
+11 -15 -1 +12 +1 0 -22 -3 +13
2. Ordena de menor a mayor los siguientes números:
5,28 5,2 5,8 5,285 5,08 5,58
3. Calcula mentalmente.
a) $7 - 2 + 4$ b) $7 - (2 + 4)$
c) $7 - (2 - 4)$ d) $-7 + 2 - 4$
e) $11 + 3 \cdot 5 - 2$ f) $(7 + 3) \cdot 5 - 2$
g) $11 + 3 \cdot (5 - 2)$ h) $(7 + 3) \cdot (5 - 2)$
4. Halla mentalmente.
a) $20 \cdot (-350)$ b) $(50 \cdot 60) : 20$
c) $(-2) \cdot 75 \cdot (-2)$ d) $1\ 640 \cdot 4$
5. Calcula mentalmente.
a) $(-2)^5$ b) $(-2)^8$ c) $(-1)^{10}$
d) $(-1)^{23}$ e) $(-5)^2 - 5^2$ f) $(-2)^3 - 2^3$
6. Calcula, escribiendo el proceso de resolución paso a paso.
a) $-2 + 4 \cdot (-1) - 3 : (-3)$
b) $(-5)^2 - 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1)$
c) $5 - 3 \cdot [4 - 8 : (-2) - 9]$
d) $-3 + 2 \cdot (-2) - 6 : (-1)$
e) $(-2)^2 - (-2)^3 + (-1)^2 - (-3)$
f) $6 + 2 \cdot [5 - 4 - 2 : (-2) - 7]$
7. Resuelve.
a) $6 - 5 \cdot [-4 - 1 + (-2)^2 - 3^2]$
b) $12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-3 + 2)^4]$
c) $(-2)^5 : (3 + 1)^2 + 2 \cdot (-5 - 4 + 3)$
8. Opera mentalmente.
a) $2,75 + 3,25$ b) $8,75 - 3,25$
c) $3,47 + 2,2$ d) $14,8 - 2,3$
e) $45,3 \cdot 100$ f) $45,3 : 100$
g) $7,46 \cdot 1\ 000$ h) $74,6 : 1\ 000$
i) $14,5 \cdot 0,1$ j) $28 \cdot 0,01$
k) $14,5 : 0,1$ l) $28 : 0,01$

9. Resuelve.
a) $135,87 + 25,3 + 35,185$
b) $125,3 - 34,85 + 27,14$
c) $25,3 \cdot 0,85$
d) $12,8 \cdot 6,07$
e) $0,89 \cdot 0,47$
f) $1,875 \cdot 8$

10. Calcula los cocientes de estas divisiones, dando el resultado redondeado a las centésimas:
a) $134,2 : 0,31$
b) $2,53 : 2,5$
c) $0,345 : 0,28$
d) $58,2 : 0,47$

Piensa y resuelve

11. María ha comprado 2,5 kg de manzanas a 1,65 €/kg, y 3,2 kg de peras a 2,1 €/kg. Tenía un vale descuento por valor de 3 €.
a) ¿Cuánto ha tenido que pagar en total?
b) Si ha pagado con un billete de 20 €, ¿cuánto le ha sobrado?
12. Hugo ha comprado una parcela de 5,24 m de largo por 12,8 m de ancho.
Averigua cuánto le ha costado, sabiendo que ha pagado 50,20 € por cada metro cuadrado.
13. Un frutero compra 125 kg de naranjas a 0,45 €/kg. En el transporte se le estropean 2 kg. ¿A cuánto debe vender cada kilogramo del resto de las naranjas, si desea obtener una ganancia de unos 120 €?
14. Un comerciante del mercadillo pone a la venta 100 pares de calcetines a 2,85 € el par.
Cuando lleva vendidos 75 pares, decide rebajarlos a 1,99 € para acelerar la venta. Así, consigue agotar la mercancía antes de levantar el puesto.
¿Cuál será su ganancia, teniendo en cuenta que pagó 225 € por el lote?
15. ¿A qué precio medio ha vendido el par de calcetines el comerciante del ejercicio anterior?