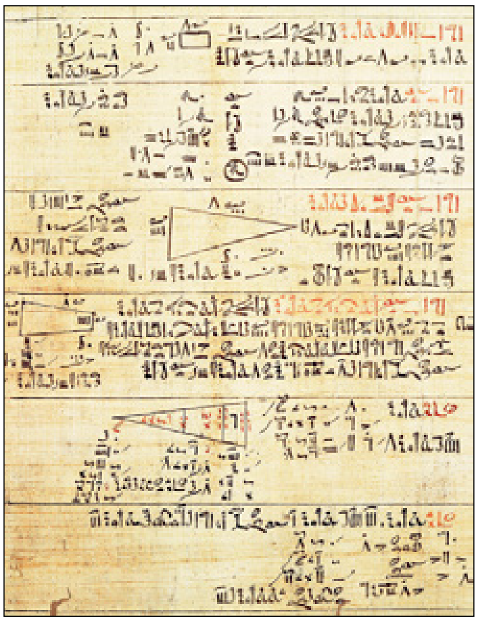
7 Ecuaciones de primer y segundo grado

Tanteos iniciales

La búsqueda de métodos para resolver ecuaciones fue un empeño de los matemáticos de la Antigüedad. Los primeros intentos, como es natural, fueron titubeantes, poco sólidos: resoluciones por tanteo o mediante procedimientos solo válidos para casos particulares, pero no generalizables.

Por ejemplo, en un papiro egipcio de 1550 a. C. aparece resuelto el siguiente problema:

"El montón más un séptimo del montón es igual a 24. ¿Cuántos hay en el montón?".



Papiro de Ahmes (o Rhind). Fue escrito en el siglo XVI a. C. y contiene 84 problemas matemáticos.

Se inicia el camino teórico

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto,** en el siglo III. En su libro *Aritmética* trató las resoluciones de ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Además, los problemas que propuso prepararon el terreno para consolidar la teoría de ecuaciones, que se desarrolló siglos más tarde.

En su obra aparecen problemas de este tipo:

"Si al número de elefantes que beben en el río le sumo el número de colmillos y el número de patas, obtengo su cuadrado. ¿Cuántos elefantes son?".

Avances significativos

En el siglo IX, en Bagdag aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi,** que dio otro importantísimo paso. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser "transposición y cancelación" y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita. El libro acabó siendo denominado, simplemente, *Al-yabr*, y este nombre finalmente designó la ciencia que contenía (al-jabr ~ álgebra).

Sello ruso en honor de Al-Jwarizmi.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones

Idea de ecuación

Una **ecuación** es una propuesta de igualdad en la que interviene, al menos, una letra llamada **incógnita.**

La **solución** de la ecuación es el valor o valores de la incógnita (o de las incógnitas) que hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es hallar su solución, o soluciones, o llegar a la conclusión de que no tiene.

Etimología

Incógnita significa *desconocida*. Viene del latín:

— *in*, partícula negativa.

— *cognoscere*, que significa *conocer*.

Aunque es usual utilizar la x como incógnita, puede usarse para ello cualquier otra letra.

Ejemplo

Las alturas de tres árboles son números enteros consecutivos y su suma es 33. Halla la altura del árbol más bajo.

Llamamos x a la altura del árbol más bajo. Las alturas de los otros dos árboles serán $x + 1$ y $x + 2$.

Los datos del problema se pueden relacionar mediante lenguaje algebraico, con la siguiente igualdad:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 33$$

Esta igualdad es una **ecuación** y su significado es: “Queremos que $x + (x + 1) + (x + 2)$ sea igual a 33. ¿Para qué valor de x es cierta esa propuesta?”.

Es decir: **¿Para qué valor de x se cumple la igualdad?**

Decir que **la solución es $x = 10$** equivale a decir que “cuando x vale 10, entonces es cierto que $x + (x + 1) + (x + 2)$ es igual a 33”.

Nomenclatura

Las expresiones que hay a ambos lados del signo “=” se llaman **miembros.** En la ecuación de la derecha, $x + (x + 1) + (x + 2)$ es el **primer miembro,** y 33, el **segundo miembro.**

Tipos de ecuaciones y resolución por tanteo

A lo largo de tu formación matemática, te encontrarás con ecuaciones de muy diversos tipos. Por ejemplo:

$$3(x - 5) + 2x = 6 \qquad x^2 - 5 = 4x \qquad 2^x = 16 \qquad \sqrt{x} = 5 \qquad \frac{1}{x} = 3$$

En algunos casos las podremos resolver tanteando, buscando “a ojo” la solución. Por ejemplo:

$2^x = 16$ → Para que 2 elevado a un número dé 16, ese número tiene que ser 4. La solución de la ecuación es $x = 4$.

Pero, a veces, puede que la ecuación tenga más de una solución o que no seamos capaces de resolverla “a ojo”. Por eso necesitamos aprender métodos que nos permitan resolver ecuaciones más complejas. Es lo que haremos en esta unidad.

Incógnitas

Hay ecuaciones con más de una incógnita.

En la próxima unidad nos ocuparemos de las ecuaciones con dos incógnitas.

Piensa y practica

1. ¿Es $x = 5$ solución de alguna de estas ecuaciones?

a) $7x + 1 = 34$ b) $x^2 - 10 = 15$

c) $1^x = 5$ d) $2^x = 32$

Justifica tu respuesta.

2. Obtén “a ojo” una solución de cada una de estas ecuaciones:

a) $2x - 1 = 5$ b) $\frac{x^3}{3} = 9$

c) $x^2 - 1 = 35$ d) $\sqrt{x+1} = 6$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución.

Ejemplo

Las dos ecuaciones que siguen tienen por solución $x = 10$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a) } 5x - 4 = 66 - 2x & \rightarrow\ 5 \cdot 10 - 4 = 66 - 2 \cdot 10 \\ \text{b) } 3x - 7 = 23 & \rightarrow\ 3 \cdot 10 - 7 = 23 \end{array}\right\} \text{ a) y b) son equivalentes.}$$

Transformaciones que mantienen la equivalencia de ecuaciones

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas para obtener ecuaciones equivalentes:

- **Sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de la ecuación.**

Ejemplo

La ecuación $3x - 5 = 1$ tiene por solución $x = 2$ $(3 \cdot 2 - 5 = 1)$.

Sumamos 5 a los dos miembros:

$$3x - 5 + 5 = 1 + 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow \text{Solución: } x = 2 \ \ (3 \cdot 2 = 6)$$

$$3x - 5 = 1 \leftrightarrow 3x = 6 \ \ \text{(son equivalentes)}$$

- **Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número distinto de cero.**

Ejemplo

La ecuación $\frac{x}{3} = x - 4$ tiene por solución $x = 6$ $\left(\frac{6}{3} = 6 - 4\right)$.

Multiplicamos por 3 los dos miembros:

$$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot (x - 4) \rightarrow x = 3x - 12 \rightarrow \text{Solución: } x = 6 \ \ (6 = 3 \cdot 6 - 12)$$

$$\frac{x}{3} = x - 4 \leftrightarrow x = 3x - 12 \ \ \text{(son equivalentes)}$$

No lo olvides

pasa sumando

- $15x - \boxed{5} = \boxed{2x} + 4 \rightarrow$

pasa restando

$\rightarrow 15x - 2x = 4 + 5$

pasa dividiendo

- $\boxed{3}(x + 4) = 8 \rightarrow x + 4 = \frac{8}{3}$

Reglas prácticas para obtener ecuaciones equivalentes más sencillas:

- Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro. Y viceversa.
- Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro, pasa dividiendo al otro. Y viceversa.

Ejemplos

Aplicamos las reglas a las ecuaciones anteriores:

$$3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 1 + 5 \rightarrow 3x = 6$$

$$\frac{x}{3} = x - 4 \rightarrow x = 3(x - 4) \rightarrow x = 3x - 12$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Ecuaciones de primer grado

Observa

La ecuación

$$\frac{3}{x} + 2 = x$$

no es de primer grado.

Si se multiplican sus miembros por x, se obtiene $3 + 2x = x^2$, que es de grado dos.

Comprueba que ambas tienen dos soluciones:

$x = 3 \qquad x = -1$

Es decir, son equivalentes.

No lo olvides

Al intentar resolver una ecuación, a veces llegamos a:

- $0x = b$, con $b \neq 0$

  La ecuación **no tiene solución.**
- $0x = 0$

  La ecuación **tiene infinitas soluciones.** Es una identidad.

A las ecuaciones polinómicas de primer grado se las llama, simplemente, **ecuaciones de primer grado.** En ellas, la x solo aparece elevada a 1 $(x^1 = x)$.

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una **única solución:** $x = -\frac{b}{a}$

Por ejemplo, son de primer grado: $3x + 5 = 8 \qquad x - 2{,}5 = 4 \qquad \frac{3}{4}x + 7 = 4 - 2x$

No son de primer grado: $(3x + 5)^2 = 8 \qquad \frac{3}{x} + 2 = x \qquad \sqrt{3x} + 1 = 5x$

Casos especiales

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $3x - 5 = 3(x + 1) \;\rightarrow\; 3x - 5 = 3x + 3 \;\rightarrow\; 3x - 3x = 3 + 5 \;\rightarrow\; 0x = 8$

  No puede ser $0x = 8$. Por tanto, **la ecuación no tiene solución.**
- $3x - 5 = 3(x - 2) + 1 \;\rightarrow\; 3x - 5 = 3x - 5 \;\rightarrow\; 3x - 3x = -5 + 5 \;\rightarrow\; 0x = 0$

  La igualdad $0x = 0$ es cierta para cualquier valor de x. Por tanto, **la ecuación tiene infinitas soluciones.**

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones.

Recuerda, a continuación, cómo se resuelven las ecuaciones más sencillas.

Ejercicio resuelto

Resolver esta ecuación:

$8 - 3x + 11x - 6 = 4x - 7 - x - 1$

$8 - 3x + 11x - 6 = 4x - 7 - x - 1$ ← Reducir los polinomios

$2 + 8x = 3x - 8$ ← Transponer términos y reducir

$8x - 3x = -8 - 2 \;\leftrightarrow\; 5x = -10$ ← Despejar x

$x = \frac{-10}{5} \;\leftrightarrow\; x = -2$

Piensa y practica

1. Resuelve mentalmente. Indica, si es el caso, cuándo la ecuación no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

a) $5x = 15$ b) $3x = -6$ c) $-2x = 10$

d) $-4x = -20$ e) $3x = 1$ f) $-2x = 10$

g) $6x = 0$ h) $0x = 6$ i) $0x = 0$

2. Resuelve estas ecuaciones. ¿Son equivalentes?

a) $4x - x = 1 + x$ b) $10 - 7x - 6x = 5 - 3x$

c) $4x + 6 - x = 5x + 5$ d) $9 = 9x - x - 3 - 2x$

3. Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.

a) $11x - 3 + x = 10x - 13$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 4 + x$

c) $9 - 3x - 2 - 3x = 1 - 3x + 3 - x$

d) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2$

e) $7x + 12 - 4x - 3 = 10 + 2x - 1 + x$

Soluciones: a) -5; b) $1/7$; c) $3/2$; d) Sin solución; e) Infinitas soluciones.

En la web Iniciación. Resuelve ecuaciones con denominadores muy sencillas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

Seguramente, aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado sencillas durante los cursos pasados. Ahora vamos a entrenarnos para resolver ecuaciones de primer grado algo más complejas.

En general, los pasos que conviene dar para ir despejando la x son:

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, por su mínimo común múltiplo.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Esta secuencia no hay que tomarla como algo rígido, pues habrá ocasiones en que convenga saltarse algún paso o cambiar el orden. El entrenamiento y el sentido común te orientarán sobre cuándo conviene hacer una cosa u otra.

Resuelve por tanteo

a) $\frac{x}{3}+1=\frac{x}{2}$

b) $8-\frac{x}{2}=\frac{x}{5}+1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$

Ayuda: todas las soluciones son números enteros.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación siguiente:

5x – 3(2x + 1) = 6(x – 4) – 7

$$\begin{array}{rcll}
5x-3(2x+1) & = & 6(x-4)-7 & \leftarrow \text{Quitar paréntesis} \\
5x-6x-3 & = & 6x-24-7 & \leftarrow \text{Reducir} \\
-x-3 & = & 6x-31 & \leftarrow \text{Transponer términos} \\
-3+31 & = & 6x+x & \leftarrow \text{Reducir} \\
28 & = & 7x & \leftarrow \text{Despejar } x \\
\frac{28}{7} & = & x \rightarrow x=4 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
5\cdot4-3(2\cdot4+1)=20-3\cdot9=20-27=-7 \\
6(4-4)-7=6\cdot0-7=-7
\end{array}\right\} \leftarrow \text{Comprobación}$$

Piensa y practica

4. Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.

a) $2x+3(3x-2)+x=10(x-3)+14$

b) $x-3-4x=3(x-1)+x-1$

c) $6=8x-(x-5)-10x$

d) $9-4x-2(1-x)=1-3(x-1)-x$

e) $-4=5(1-x)-x-3(1+7x)$

f) $8x=6x-4x-3+x+7+5x-2$

g) $7x-2(x-1)-4=10-4(3-x)+x$

Soluciones: a) –5; b) 1/7; c) –1/3; d) –3/2; e) 2/9; f) Sin solución; g) Infinitas soluciones.

5. ¿Qué números pondrías en cada casilla para que la ecuación $\square x+5=2x+\square$…

a) … tenga infinitas soluciones?

b) … no tenga solución?

6. Busca el valor que debe tomar la a en la igualdad

$$3x-a(x+1)=5$$

para que la ecuación no tenga solución.

7. Considera la igualdad $5a-2(a+b)=7-3(a-b)$.

a) Calcula el valor de b cuando $a=3$.

b) Calcula el valor de a cuando $b=5$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver esta ecuación:***

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=1-\frac{x}{5}+\frac{3x}{10}$$

$\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=1-\frac{x}{5}+\frac{3x}{10}$ ← Quitar denominadores multiplicando...

$10\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\right)=10\cdot\left(1-\frac{x}{5}+\frac{3x}{10}\right)$ ← … por 10, que es el mín.c.m. de 2, 5 y 10

$5x+2=10-2x+3x$ ← Transponer términos, reducir y despejar

$4x=8 \rightarrow x=\frac{8}{4} \rightarrow x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{2}+\frac{1}{5}=\frac{10+2}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}\\ 1-\frac{2}{5}+\frac{3\cdot 2}{10}=1-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5-2+3}{5}=\frac{6}{5}\end{array}\right\}$$ ← Comprobación

2. ***Calcular el valor de x:***

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=$$
$$=\frac{4x+2}{15}-5$$

$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$ ← Quitar denominadores multiplicando…

$60\cdot\left(\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}\right)=60\cdot\left(\frac{4x+2}{15}-5\right)$ ← … por 60, que es el mín.c.m. de 20, 5 y 15

$3(3x-1)-24(x+3)=4(4x+2)-300$ ← Quitar paréntesis y reducir

$9x-3-24x-72=16x+8-300$ ← Transponer términos, reducir y despejar

$-31x=-217 \rightarrow x=\frac{-217}{-31} \rightarrow x=7$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3\cdot 7-1}{20}-\frac{2(7+3)}{5}=\frac{20}{20}-\frac{20}{5}=-3\\ \frac{4\cdot 7+2}{15}-5=\frac{30}{15}-5=-3\end{array}\right\}$$ ← Comprobación

Piensa y practica

8. Quita denominadores y resuelve.

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10}$

b) $2-\frac{x}{4}+x=\frac{5x}{8}+1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}=1$

d) $x-\frac{1}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1$

e) $1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}=x-\frac{2}{3}$

Soluciones: a) 15/14; b) –8; c) 20/7; d) 1; e) 6/5

9. Calcula el valor de x en cada caso:

a) $\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}=x-\frac{2x-1}{10}$

b) $\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}=x-\frac{1-3x}{4}$

c) $\frac{3(1+2x)}{8}-\frac{x}{2}=1-\frac{3-x}{4}$

d) $\frac{x-2}{10}-\frac{3x-1}{8}=\frac{2(x+1)}{5}-1$

e) $\frac{4(x-2)}{9}-\frac{3(1-x)}{2}=\frac{21x-11}{8}-\frac{7}{24}$

Soluciones: a) 2; b) 3/19; c) Sin solución; d) 7/9; e) –52/49

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$$

Por ejemplo, son ecuaciones de segundo grado las siguientes:

- $3x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow a = 3, \; b = -3, \; c = -6$
- $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow a = 2, \; b = 0, \; c = -8$
- $x^2 - 6x = 0 \rightarrow a = 1, \; b = -6, \; c = 0$

En la primera ecuación, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Este tipo de ecuaciones se denominan **completas.**

En la segunda, $b = 0$; y en la tercera, $c = 0$. Este otro tipo de ecuaciones se llaman **incompletas.**

Veamos cómo resolver cada una de ellas.

En la web

Clasificación de ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones incompletas con $b = 0$

Por ejemplo: $2x^2 - 8 = 0$

Para resolverla, despejamos x^2:

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4$$

Ahora, obtenemos los valores de x teniendo en cuenta que hay dos números cuyo cuadrado es 4. Son 2 y –2. Es decir:

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \left< \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right\} \text{Hay dos soluciones.}$$

Así se hace

$$ax^2 + c = 0$$
$$\downarrow$$

Despejamos x^2 y obtenemos fácilmente los valores de x.

En la web

Practica las ecuaciones incompletas con $b = 0$.

Ecuaciones incompletas con $c = 0$

Por ejemplo: $x^2 - 6x = 0$

Para resolverla, sacamos x factor común:

$$x^2 - 6x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 6) = 0$$

Ahora, tenemos en cuenta que, para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea cero alguno de ellos. Es decir:

$$x \cdot (x - 6) = 0 \left< \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{array} \right\} \text{Hay dos soluciones.}$$

Así se hace

$$ax^2 + bx = 0$$
$$\downarrow$$

Sacamos x factor común e igualamos a cero cada factor.

En la web

Practica las ecuaciones incompletas con $c = 0$.

Ejercicio resuelto

Resolver: a) $5x^2 - 15x = 0$ ***b)*** $2x^2 + 8 = 0$

a) Incompleta con $c = 0 \rightarrow$ Sacamos x factor común:

$$5x^2 - 15x = 0 \rightarrow x(5x - 15) = 0 \left< \begin{array}{l} x = 0 \\ 5x - 15 = 0 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$$

b) Incompleta con $b = 0 \rightarrow$ Despejamos x^2:

$$2x^2 + 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \text{ No tiene solución}$$

Ten en cuenta

No hay ningún número que al elevarlo al cuadrado dé –4.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ecuaciones completas

Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en la que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ (ecuación completa), aplicamos la siguiente fórmula:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reflexiona

Las **ecuaciones incompletas** también se pueden resolver aplicando la fórmula, pero es mucho más sencillo resolverlas como vimos en la página anterior.

Como ejemplo, vamos a resolver la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

En ella, $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$.

Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = \frac{6}{2} = 3 \\ x = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

En la web

Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Hay dos soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

Comprobación: $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

Ejercicio resuelto

Resolver las ecuaciones siguientes:

***a)** $x^2 - 4x + 4 = 0$* ***b)** $2x^2 + 4x + 10 = 0$*

a) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -4,\ c = 4.$ Es completa, luego:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hay una solución: $x = 2$

b) $2x^2 + 4x + 10 = 0 \rightarrow a = 2,\ b = 4,\ c = 10.$ Es completa, luego:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 80}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{4}$$

No tiene solución, pues no existe $\sqrt{-64}$ (ningún número elevado al cuadrado da -64).

Ten en cuenta

Al aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si lo que va debajo de la raíz sale cero, la ecuación tiene una única solución.
- Si lo que va debajo de la raíz sale negativo, la ecuación no tiene solución.

Piensa y practica

1. Resuelve estas ecuaciones sin aplicar la fórmula:

a) $5x^2 - 5 = 0$
b) $5x^2 + 5 = 0$
c) $2x^2 + 3 = 35$
d) $x^2 - 9x = 0$
e) $2x^2 - 6x = 0$
f) $5x^2 + 5x = 0$
g) $8x^2 - 16x = 0$
h) $4x^2 = 36$
i) $x^2 + 1 = 0$
j) $x^2 + x = 0$

2. Resuelve estas ecuaciones aplicando la fórmula:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$
b) $x^2 + 6x - 7 = 0$
c) $2x^2 + 2x - 24 = 0$
d) $x^2 + 4x + 3 = 0$
e) $x^2 - 10x + 25 = 0$
f) $x^2 - x + 1 = 0$
g) $x^2 + 2x + 1 = 0$
h) $-x^2 + 5x - 6 = 0$
i) $-2x^2 - 12x + 14 = 0$
j) $-x^2 - 2x - 1 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Otras ecuaciones de segundo grado

En general, una ecuación de segundo grado se presentará en forma no reducida y será necesario simplificarla, transformándola en otra equivalente, con la forma que has visto en la página anterior, para poder aplicar la fórmula.

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver la ecuación*** $\boldsymbol{10 - (x-2)^2 = 2x(x-1) + 3x}$.

$10 - (x-2)^2 = 2x(x-1) + 3x$ ← Desarrollar $(x-2)^2$

$10 - (x^2 - 4x + 4) = 2x(x-1) + 3x$ ← Eliminar paréntesis

$10 - x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 2x + 3x$ ← Transponer y reducir

$0 = 3x^2 - 3x - 6 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ ← Resolver con la fórmula

$(a = 1,\ b = -1,\ c = -2)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. ***Resolver la ecuación*** $\boldsymbol{\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}}$

$\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$ ← Multiplicar por $2x$ para…

$2x\left(\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x\left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right)$ ← … eliminar los denominadores

$x(x+3) - 2 = 2(x-3) + (4 - x^2)$ ← Eliminar paréntesis

$x^2 + 3x - 2 = 2x - 6 + 4 - x^2$ ← Transponer y reducir

$2x^2 + x = 0$ ← Resolver la ecuación de segundo grado incompleta

$$x(2x+1) = 0 \begin{cases} \boxed{x = 0} \rightarrow \text{no válida} \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Compruébalo

$10 - (x-2)^2 = 2x(x-1) + 3x$

- Para $x = 2$:
  $10 - (2-2)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (2-1) + 3 \cdot 2$
- Para $x = -1$:
  $10 - (-1-2)^2 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1-1) + 3 \cdot (-1)$

Ten en cuenta

En la ecuación de la derecha, rechazamos como solución $x = 0$, que es solución para la ecuación final, $2x^2 + x = 0$, pero no para la ecuación propuesta, ya que

$$\frac{0+3}{2} - \frac{1}{0} = \frac{0-3}{0} + \frac{4-0^2}{2 \cdot 0}$$

carece de sentido por tener algunos denominadores nulos.

Piensa y practica

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-3)x + 1 = x^2 - 5x(x+1)$

b) $3(x-1) - 4x = 2(x+1)(x-1) + 2$

c) $3x^2 - (x+3)^2 = x^2 - 17$

d) $2x^2 - (x-5)^2 = 11 - (x-6)^2$

e) $5x(x^2 - x) + 1 = x^2(5x-3) + x$

f) $10x + (2x-3)(2x+3) = 5 - 2(x-1)^2$

g) $8x - [x^2 + (x-2)^2] = -(x+2)^2$

4. Reduce, resuelve y comprueba las soluciones:

a) $x + \frac{2x+3}{3} = 1 - \frac{2x^2}{3}$

b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} = \frac{x}{4} - \frac{1}{12}$

c) $\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3}$

d) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

e) $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$

En la web Practica la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que relacionan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil seguir estos pasos:

1. Identificar los datos conocidos, lo que deseamos conocer y dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución en el contexto del enunciado.

Observación

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que, así, se simplifica la tarea de traducir enunciados a ecuaciones.

Problema 1

Elvira tiene 8 años menos que Carlos y este tiene 2 años más que Lourdes. Sumando las edades de los tres, obtenemos 17 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

1. Llamamos x a la edad de Lourdes. De acuerdo con esto, tenemos que:

— Edad de Lourdes → x

— Edad de Carlos → $x + 2$

— Edad de Elvira → $x + 2 - 8 \rightarrow x - 6$

2. Obtenemos la ecuación que relaciona lo conocido con lo desconocido:

$$\underbrace{x-6}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Elvira}}}} + \underbrace{x+2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Carlos}}}} + \underbrace{x}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Lourdes}}}} = 17$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$x - 6 + x + 2 + x = 17 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$$

4. Interpretamos la solución ajustándola al enunciado:

— Lourdes tiene 7 años.

— Carlos tiene 7 + 2 = 9 años.

— Elvira tiene 7 – 6 = 1 año.

Compruébalo

- Lourdes → 7 años
- Carlos → 9 años
- Elvira → 1 año

$7 + 9 + 1 = 17$

Piensa y practica

1. Calcula tres números sabiendo que:

— El primero es 20 unidades menor que el segundo.

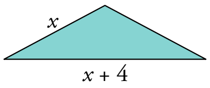
— El tercero es igual a la suma de los dos primeros.

— Entre los tres suman 120.

2. Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y este cuesta el doble que el helado. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

3. Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?

4. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 4 cm más que cada uno de sus lados iguales. Halla la longitud de los lados sabiendo que su perímetro es de 40 cm.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones: soluciones, tanteo…

1. Comprueba cuál de los números 1, 2 o 4 es la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 = 1$

b) $\frac{x}{2} - 3x = -10$

c) $x^3 - 1 = 0$

d) $2^x = 4$

e) $\sqrt{x} = 2$

f) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

2. Resuelve mentalmente y explica el proceso seguido.

a) $\frac{x-5}{4} = 1$

b) $5x + 1 = 11$

c) $3(x - 2) = 12$

d) $\frac{x}{3} + 1 = 6$

e) $\frac{x+1}{3} = 6$

f) $x^3 = 8$

g) $3^x = 81$

h) $\sqrt{2x} = 4$

3. Resuelve por tanteo.

a) $\frac{x+4}{2} = 65$

b) $\frac{x}{2} - 1 = 3$

c) $2(x + 1) = 16$

d) $x^2 = 25$

e) $x^3 = 64$

f) $2^x = 32$

g) $\sqrt{x+1} = 5$

h) $\frac{2}{x} = 1$

Ecuaciones de primer grado

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $12x - 8 = 34 + 5x$

b) $4(2 - x) - (4 - x) = 7(2x + 3)$

c) $2[x + 3(x + 1)] = 5x$

d) $5(x - 2) - 2(x - 5) = 2x - (12 + 3x)$

5. Elimina los denominadores y resuelve.

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{-1}{15}$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{13}{6}$

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = -1$

d) $\frac{3x+1}{5} - x + 1 = 0$

e) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{3(x-1)}{7} - 2(x + 3) + 8 = 0$

6. Simplifica y resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x = x - \frac{1}{6}$

b) $\frac{3x-3}{4} = \frac{x+4}{3}$

c) $\frac{3(x+3)}{2} - 2(2x - 2) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

d) $\frac{3(x+3)}{4} - \frac{3x-2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{x+3}{12}$

e) $\frac{x+7}{2} - \frac{7-x}{6} = \frac{x-7}{12} + 7$

f) $\frac{5+x}{4} - \frac{5-x}{5} = \frac{1+x}{4} - 1$

7. Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla su solución:

a) $(x + 1)(x - 1) - 3(x + 2) = x(x + 2) + 4$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = x(x + 3) - (x^2 + 1)$

c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - x\left(x + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}(x - 2)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Ecuaciones de segundo grado

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:

a) $7x^2 - 21x = 0$

b) $2x^2 + x = 0$

c) $2x^2 - 14x = 0$

d) $4x^2 - 32x = 0$

e) $x^2 - 36 = 0$

f) $3x^2 - 147 = 0$

e) $16x^2 = 100$

9. Resuelve estas ecuaciones:

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

b) $3x^2 - 3x - 6 = 0$

c) $4x^2 + 16x + 16 = 0$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $x^2 - 18x + 81 = 0$

f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

g) $x^2 - 9x + 14 = 0$

h) $x^2 - 6x + 10 = 0$

i) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

10. Reduce, resuelve y comprueba las soluciones.

a) $5x^2 - 3x(x - 4) = (x - 2)^2 + 13$

b) $3x(x - 2) - 6 = (x + 1)(x - 4)$

c) $x - \frac{x^2}{2} = \frac{x-2}{5}$

d) $\frac{5x}{6} - \frac{x^2}{3} = 11 - \frac{x^2}{2} + 2$

e) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x}$

f) $\frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} = 0$

g) $\frac{x+3}{3} - \frac{(4-x)^2}{9} = \frac{1}{3}$

Piensa y resuelve

11. Calcula un número cuya mitad es 20 unidades menor que su triple.

12. Si a un número le restas 12, se reduce a su tercera parte.

¿Cuál es ese número?

13. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor.

¿De qué números se trata?

14. Con 3,50 € más el dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €.

¿Cuánto dibero tengo?

15. En un rectángulo de 74 cm de perímetro sabemos que la altura mide 7 cm menos que la base.

Halla sus dimensiones.

16. El mayor de los ángulos de un triángulo mide 50° más que el mediano; y este mide 20° más que el pequeño.

¿Cuánto mide cada ángulo?

Los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180°.

17. La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años.

¿Qué edad tiene cada uno?

18. Con 12 € que tengo, podría ir dos días a la piscina, un día al cine y aún me sobrarían 4,50 €. La entrada de la piscina cuesta 1,50 € menos que la del cine.

¿Cuánto cuesta la entrada del cine?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....